6. זוויות

רקע

במבוא של פרק 3, "מלבן ותיבה", הפרק הראשון העוסק בגאומטריה, נחשפו התלמידים למושגים העיקריים בגאומטריה, ביניהם המושג "זווית". בפרק 3 הם ניתחו את התכונות של צורה ושל גוף הנפוצים בסביבתם. הפרק **זוויות** הוא הראשון בסדרת פרקים החוקרים בהם צורות נפוצות פחות ותכונות שפחות נראות לעין.

תלמידי חטיבת הביניים סבורים בטעות, כי זוויות שייכות לנושאים כגון זוויות במצולעים או זוויות במעגל. למעשה, לזווית יש מקום מרכזי וייחודי בטריגונומטריה ובמדעים, כמו אסטרונומיה ופיזיקה, לכן לימוד יסודי של המושג ושל תכונותיו מכין את התלמידים ללימודים בהמשך. לפיכך טוב ללמד את הנושא לפני הפרקים המוקדשים למשולש.

מה בפרק?

לפי תכנית הלימודים של משרד החינוך, אין מלמדים את התלמידים בכיתות ז' את הגאומטריה הדדוקטיבית, אלא מלמדים אותם מיומנויות של זיהוי ושל סרטוטים כולל הנמקות והסברים ברמה לא פורמלית.
עם זאת כמו בכל פרק בגאומטריה, חשוב להבדיל בין שני ההיבטים של הגאומטריה:

- ההיבט ב"גאומטריה טהורה" הקשור להגדרות, לתכונות ולקשרים בין מושגים;
- ההיבט המספרי הקשור למדידות.

הפרק מחולק לארבעה מדורים:

מדור א': הרחבת הגדרת המושג "זווית", בלי מדידות. זהו ההיבט **הגאומטרי** המהותי.
מדור ב': השוואה בין זוויות ומדידות, זהו ההיבט **המספרי** של הנושא.
מדור ג': זוויות ופעולות חשבון, סכום, הפרש וחילוק (חוצה זווית). גם נושאים אלה שייכים להיבט **המספרי**.
מדור ד': שילוב שני ההיבטים: הגדרות של סוגים שונים של זוויות בין ישרים, עיסוק במקרה הפרטי והחשוב של זוויות בין ישרים מקבילים וחותך, וקשר עם האלגברה בחישובים של זוויות.

<u>לתשומת לבכם</u>: סגנון הסרטוטים בספר גובש כדי שהסרטוטים יהיו מובנים ואחידים לכל המשתמשים.
לדוגמה, אין-סופיות של קו מומחשת על-ידי קווקוו בשני צדיו, קרן מקווקוות בצד אחד, שוקי זוויות גם הן מקווקוות בצד אחד, כי הן קרניים וכן הלאה. רצוי לעודד את התלמידים להשתמש בסימונים כמו בספר הלימוד, כדי שידעו לפענח נכונה את הסרטוטים, וכן לקבוע שפה משותפת בין תלמידי הכיתה.
מומלץ להקדיש לפרק כ- 15 שעות.

מבנה הפרק

מדור א. הרחבת המושג "זווית"

מדור ב. מדידת זוויות והשוואה בין זוויות

ב.1 מדידת זוויות

ב.2 השוואה בין זוויות הקטנות מזווית שטוחה

ב.3 מיון זוויות

מדור ג. זוויות ופעולות

ג.1 סכום והפרש של זוויות

ג.2 חוצה זווית

מדור ד. זוויות וישרים

ד.1 זוויות צמודות

ד.2 זוויות קדקודיות

ד.3 זוויות מתאימות, זוויות מתחלפות

מיומנויות: מדידת זוויות בעזרת מד-זווית

קשיים בהוראת הנושא

א בין המתמטיקאים אין הסכמה חד-משמעית לגבי הגדרת הזווית. לכן לא מובאת כאן הגדרה פורמלית, אלא מתארים את הזווית כך: הזווית *נוצרת* על-ידי שתי קרניים שיש להן התחלה משותפת. מתיאור זה קשה להבין מהי זווית. לכן מסבירים לתלמידים שלמעשה זווית היא ה"מִפְתָּח" בין שתי הקרניים.

ב אנו רגילים ששתי קרניים יוצרות שתי זוויות (שסכומן $360°$). אם שתי הזוויות אינן שוות ל- $180°$, אחת מהן היא זווית הקטנה מזווית שטוחה, והאחרת גדולה מזווית שטוחה וקטנה מזווית של סיבוב שלם*. עתה מתעוררת בעיה נוספת: הסברנו לתלמידים שזווית היא "מִפְתָּח" בין *הקרניים*, אבל קשה להסביר לתלמידים מה המשמעות של *"בין הקרניים"* לגבי זווית גדולה מזווית שטוחה. אחת מההגדרות שאפשר להתגבר באמצעותן על קושי זה, היא שהזווית היא *חלק מהמישור המוגבל על-ידי שתי קרניים*. יש המגדירים זווית כך: שתי קרניים מחלקות את המישור לשני חלקים. זווית היא *שתי קרניים בעלות התחלה משותפת וכוללת את אחד משני החלקים האלה.*

ג כאשר מסורטטים שני קטעים שאחד מקצותיהם הוא נקודה משותפת, ושואלים את התלמידים אם יש כאן זווית, התלמידים ישיבו בחיוב, כי האינטואיציה היא שיש כאן זווית; או שישיבו בשלילה, כי הקטעים אינם קרניים, ולכן אין כאן זווית לפי ההגדרה. לפיכך יש צורך בהרחבה של המושג *זווית*, ולכן במתמטיקה מגדירים זווית כך: בין כל שני קווים שאינם קרניים. הגדרות ותיאורים נוספים יוצרים עומס נוסף על התלמידים.

---

* יש הקוראים לזווית גדולה מזווית שטוחה וקטנה מזווית של סיבוב שלם בשם "זווית נישאה". אין המלצה של משרד החינוך להשתמש במושג זה, לכן גם כאן לא משתמשים בו.

כל התלמידים יודעים שבמצולע מספר הזוויות שווה למספר הצלעות. אבל מה זו *זווית* במצולע? לפי התיאור בסעיף הקודם, אין זוויות במצולע, כלומר המושג שונה ממה שהכרנו קודם לכן.

ד אם נשאל: "בשעה 11 מחוג הדקות מצביע על המספר 12. באיזו זווית יסתובב מחוג הדקות כעבור 10 דקות?" נראה שיש כאן מושג חדש: *זווית הסיבוב*. במושג זה אין שתי קרניים, אלא קרן אחת (או קטע אחד), והיא מסתובבת סביב התחלתה של הקרן וגם יכולה להסתובב עד אין-סוף פעמים ואף ליצור זוויות גדולות מ- $360°$ אם תעשה סיבובים גדולים מזווית של סיבוב שלם.

ה מדידת זווית ובניית זווית בגודל נתון הן מקור נוסף לקשיים, כמו מיקום מד-הזווית, קריאת המידה כאשר אחת מה"שוקיים" קטנה מרדיוס מד-הזווית, המודעות לכך שקיימות זוויות קטנות ממעלה אחת, ועוד.

ו סימון זוויות בקשתות ומתן שם לזווית בעזרת אותיות מהווים קושי נוסף בהפנמת הנושא.

מושגים ומונחים

המושגים והמונחים הנלמדים בפרק:

קרן, זווית, שוק הזווית, שוק משותפת לשתי זוויות, השוואה בין זוויות, זוויות שוות, סכום זוויות, זווית שטוחה, זווית הקטנה מזווית שטוחה, זווית חדה, זווית קהה, זווית ישרה, זווית הגדולה מזווית שטוחה, מדידת זווית, מד-זווית, מידת זווית, מעלה, חוצה-זווית, זוויות צמודות, השוואה בין זוויות, שוויון זוויות, זוויות קדקודיות, זוויות מתחלפות, זוויות מתאימות. גדול (קטן) ב-, גדול (קטן) פי.

מטרות

התלמידים ידעו:

א להשוות בין זוויות הקטנות מזווית שטוחה בהשוואה ישירה ובעזרת מדידה;

ב לסמן זוויות בסימון מקובל (לדוגמה, בקשתות);

ג לבנות סכום של שתי זוויות;

ד לזהות סכום זוויות והפרש זוויות בסרטוט מתאים;

ה לבנות חוצה-זווית לזווית נתונה;

ו להסביר אם קרן נתונה היא חוצה-זווית של זווית או לא;

ז לזהות בסרטוט זווית ישרה, זווית קהה, זווית חדה וזווית שטוחה;

ח למיין זוויות ביחס לזווית שטוחה וביחס לזווית ישרה;

ט למדוד זווית במעלות בעזרת מד-זווית;

י להתאים מידת זווית לסוג הזווית (זווית חדה, ישרה, קהה, שטוחה);

יא לזהות שתי זוויות הנוצרות על-ידי שתי קרניים עם התחלה משותפת;

יב להגדיר זוויות צמודות;

יג לזהות זוויות צמודות בסרטוט;

יד לבנות (בסרטוט) זוויות צמודות;

טו לסרטט זווית צמודה לזווית נתונה;

טז לפתור שאלות בעזרת תכונות של זוויות צמודות;

יז לחשב את מידת הזווית הצמודה לזווית נתונה;

יח לחשב מידות של זוויות צמודות על-פי נתונים;

יט לבנות זוויות קדקודיות;

כ להסביר מדוע שתי זוויות הן קדקודיות או לא;

כא לפתור שאלות בעזרת תכונות של זוויות קדקודיות;

כב לזהות זוויות מתחלפות;

כג לזהות זוויות מתאימות.

ציוד

סרגל, מחוגה, דפים לקיפול, עפרון, מחק, כלים להדגמה למורה. לוח מחיק.

השיעור בספר הלימוד

מגלים ולומדים עמ' 285

א. הרחבת המושג "זווית"

מגלים (עמ' 285)

לפני ביצוע המשימה מומלץ לחזור על המושג "זווית" (המופיע במסגרת). ההבדל בין שני הסרטוטים הוא נוכחות הנקודות **A** ו- **B** היוצרות את הקטעים **OA** ו- **OB** ובכך יוצרות זווית בין קטעים.

בצורה א' מופיעות זוויות בין קרניים, ובצורה ב' זווית בין קטעים וזוויות בין קרן וקטע.

<u>הערה</u>: זווית בין קרן לקטע אינה מופיעה בתכנית הלימודים, לכן לא הורחב בנושא, אך יש תלמידים שישאלו אם זווית קיימת, ויש לתת להם תשובה חיובית על-ידי הדוגמה.

במסגרת "זכרו" חוזרים המושגים שנלמדו בבית הספר היסודי ובפרק 3. כדי להדגיש שכל שתי קרניים שיוצאות מקדקוד משותף יוצרות שתי זוויות, אפשר להדגיש את הזוויות בצבעים שונים (גם כאשר מדובר בזווית שטוחה).

לומדים (עמ' 285)

בכיתה ז' חשוב להבחין בין שני מצבים של זוויות בין קטעים:

- **קטעים שיש להם קצה משותף** – מצב זה מוכר לתלמידים מבית הספר היסודי וגם באופן אינטואיטיבי (זוויות במצולע);
- **קטעים נחתכים** – מצב זה נפוץ בהמשך בשאלות הקשורות לזוויות בצורות מורכבות (משימות 157 – 167).

נושא הזוויות בין ישרים יורחב במדור ד'. בחלק זה של השיעור אין הגדרה של זוויות בין ישרים, אלא הצגה חזותית המאפשרת זיהוי זוויות.

סימון זוויות: תלמידים יראו בספר ובהמשך הלימודים (בגאומטריה ובטריגונומטריה) סימונים שונים של זוויות, ולכן הוחלט להציג אותם בהתחלת הפרק. סימון של זוויות הוא מיומנות שיש לפתח בתוך כדי ביצוע המשימות.

משימות

1 משימת יישום. על התלמידים לזהות זוויות לפי ההגדרה שהכירו. הזוויות הן בסעיפים ג', ד', ז', י', י"א, י"ג.

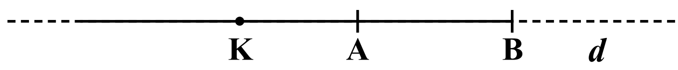
2 זיהוי שם של זווית: ב'.

3 מיומנות סרטוט: אפשר לוותר על המשימה בכיתות המתקדמות.

4 חשוב להקפיד שהאות האמצעית תייצג את קדקוד הזווית. דוגמאות: **∡BOS**, **∡AOS**, **∡SOA**.
אפשר לוותר על המשימה בכיתות המתקדמות.

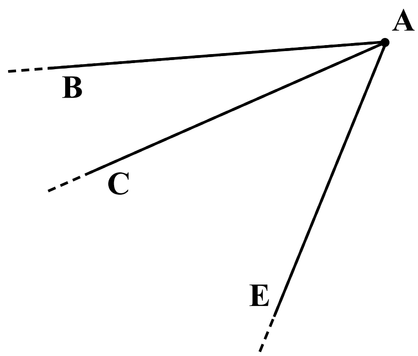
5 חזרה על יחסי הכללה בין ישר, קרן וקטע. (אין צורך להשתמש במונח "הכללה", צריך רק להדגים אותו.)
"ישר" הוא מונח יסודי (שאין לו הגדרה), אך המאפיין הוא שישר אינו מוגבל. קרן היא חלק של ישר, והיא מוגבלת רק בצד אחד. לקטע יש שני קצוות. בכיתות המתקדמות יש להסביר שההבדל הוא "טיפולוגי", ובשלושתם מספר הנקודות הוא אין-סופי.

הקטע **AB** הוא חלק מהישר ***d***. גם הקרניים המתחילות ב- **K**, ב- **A** וב- **B** הן חלק מהישר ***d***.

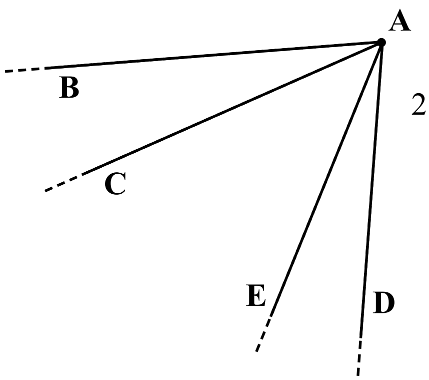


6 **א** נוסף על פיתוח מיומנות של סרטוט, נדרשות כאן הבנת הנקרא והבנה של אילוצים. יש להניח שהרבה תלמידים יוסיפו בסרטוט המבוקש בסעיף א' אילוץ שלא כתוב במשימה, ויסרטטו זוויות בעלות שוק משותפת (סרטוט 1). במקרה זה רצוי לבקש לסרטט דוגמה נוספת המתאימה לאילוץ אחד בלבד (סרטוט 2).

סרטוט 1



סרטוט 2



ב לזוויות בעלות שוק משותפת יש בהכרח אותו קדקוד.

7 **א** מאוחר יותר יכירו התלמידים זוויות צמודות וזוויות קדקודיות. כאן אנו מתרכזים רק במתן שם לזוויות. **∡AOB**, **∡BOC**, **∡COB**, **∡DOA**. יש להניח שרוב התלמידים לא יחשבו על זוויות גדולות מזווית שטוחה. **∡AOD**, **∡BOA**, **∡COB**, **∡DOC**.

ב דוגמאות: **∡JFS**, **∡JFN**, **∡SFP**, **∡SFN**, **∡PFN**.

ג דוגמאות: **∡BOT**, **∡TOS**, **∡SVA**.

8 משימת יישום לתלמידים חלשים.

9 משימת יישום. אפשר להשתמש בלוח מחיק. אין צורך בהעתקה מדויקת, אלא די להעתיק בערך ארבעה קטעים של קו שבור. החשוב הוא סימון הזוויות כמו ב"שימו לב" שבאותו עמוד.

10 כשמסרטטים משולש, נוצרים שלושה קטעים ושלוש זוויות בין קטעים, שהן קטנות מזווית שטוחה. יש להניח שרוב התלמידים לא יחשבו על זוויות גדולות מזווית שטוחה. הדבר אינו חשוב בכיתה ז'. מאוחר יותר ילמדו תכונות הקשורות לזוויות האלה.

11 **א** נוצרו שלושה ישרים על-ידי שלוש נקודות שלא נמצאות על אותו ישר.

ב בפרק 3 במשימה 19 ראו התלמידים שבכל חיתוך של 2 ישרים נוצרות 4 זוויות קטנות מ- $180°$ ו- 4 זוויות גדולות מ- $180°$. לכן נוצרו 24 זוויות. 12 זוויות קטנות מ- $180°$ ו- 12 זוויות גדולות מ- $180°$.

12 לא, כי מחוג השעות נמצא לפני המספר 3, ומחוג הדקות בדיוק בכיוון מספר 9.

13 1לא, כי מחוג השעות נמצא אחרי המספר 12, ומחוג הדקות בדיוק בכיוון המספר 6.

14 משימה לשיעורי בית. התלמידים צריכים לעבוד בשיטתיות. בסרטוט יש 22 זוויות הקטנות מזווית שטוחה.

15 קריאת סרטוט המחזקת הבנה של זוויות שונות. אפשר לנהל את המשימה בעל-פה ולכתוב את תשובות התלמידים על הלוח.

א $\angle$**IOK**, $\angle$**UOI**, $\angle$**UOK**, $\angle$**COU**.

ב $\angle$**VBZ**, $\angle$**ZBI**, $\angle$**IBA**.

ג $\angle$**OIB**, $\angle$**TOI**, $\angle$**IOK**.

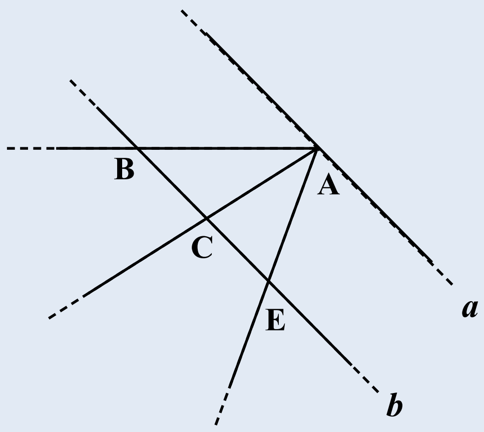
ד $\angle$**OIT**, $\angle$**TIB**, $\angle$**ITK**.

16 משימה פתוחה הדומה למשימה 9, אך כאן נדרש סרטוט. יש כאן חזרה על הגדרה של "קו שבור": שלושה קדקודים סמוכים שאינם נמצאים על אותו ישר.

פיצוחים

17 **א** משמעות המילה "לפחות": שני ישרים נחתכים.

ב הישרים a ו- b מקבילים. בקדקודים **E–C–B** נוצרו 12 זוויות קטנות מזווית שטוחה, ובקדקוד **A** נוצרו 9 זוויות קטנות מזווית שטוחה.



ב. מדידת זוויות והשוואה בין זוויות

ב.1. מדידת זוויות

<u>מגלים (עמ' 290)</u>

חשוב לדון בהסברי התלמידים. בזוויות מודדים "מִפתח" בין הקרניים. "אורך" הקרניים הנראה לעין בסרטוט אינו משפיע על המדידה. אפשר להדגים את המִפתח בעזרת מחוגה. תחילה המחוגה סגורה (הרגליים שלה "מתלכדות"). מתחילים לפתוח את המחוגה ורואים כיצד הזווית גדֵלה. אפשר להתייחס לזווית כאל צורה גאומטרית או כאל אובייקט שאפשר למדוד אותו. כשם שבמדידת קטעים משווים בין קטע לקטע היחידה (לדוגמה, יחידה באורך 1 ס"מ), גם במדידת זוויות צריך להשוות בין זווית לזווית שתשמש יחידת מדידה. (לדוגמה, אפשר לבחור זווית ישרה כזווית יחידה ולהשוות בינה לבין כל זווית אחרת. אך יחידה זו אינה נוחה, כי היא גדולה מדי.)

לפי ההגדרה, כל שתי קרניים שיש להן התחלה משותפת, יוצרות זווית. לכן שתי קרניים מתלכדות יוצרות גם הן זווית. מידתה של זווית זו היא 0^0, והיא אינה חדה. בשעה 12 בדיוק מחוגי שעון מחוגים מתלכדים ויוצרים זווית של 0^0.

זווית של מעלה אחת כמעט לא נראית לעין, לכן התלמידים סבורים שזוויות קטנות מזווית של מעלה אחת אינן קיימות. לפיכך הם חושבים בטעות שמספר המרובעים שאפשר לבנות מארבע רצועות הוא רק 360. (מקור הטעות לכך הוא שסכום הזוויות במרובע הוא 360^0, ולכן יש רק 360 אפשרויות לזוויות שונות.) למעשה, אפשר לחלק את הזווית לחלקים שווים (כי תמיד אפשר להעביר קרן בין שתי קרניים שאינן מתלכדות). לדוגמה, אם נחלק את הזווית של מעלה אחת לשני חלקים שווים, נקבל שתי זוויות שוות שכל אחת מהן קטנה מזווית של מעלה. בתום הדיון מלמדים את התלמידים את המושגים "דקה" ו"שנייה".

<u>לומדים (עמ' 290)</u>

בפרק מופיעה יחידת המידה המקובלת למדידת זוויות – מעלה. בכיתות הגבוהות יכירו התלמידים יחידה נוספת למדידת הזווית – רדיאנים. היחידות של "דקה" ו"שנייה" הן שימושיות פחות בחיי היום-יום. לכן חשוב להזכיר את יחידות המידה הללו כדי להבהיר כי מעלה אחת היא לא היחידה הקטנה ביותר, וזווית היא גודל רציף (בדומה לאורך של קטע). חשוב לתרגל מדידת זווית באמצעות מד-זווית רגיל ועגול (בהמשך). המדידות מסייעות בפתרון השאלות ובהבנת הנושא בכלל והמושג "גודל הזווית" בפרט.

אפשר לחלק כל זווית של מעלה אחת לחלקים שווים, וכך מתקבלת יחידת מידה קטנה יותר. כמובן, זוויות קטנות ממעלה לא נראות לעין. מקובל לחלק את המעלה ל- 60 חלקים שווים. $\frac{1}{60}$ של מעלה נקראת דקה.
אפשר להמשיך את החלוקה ולקבל יחידות קטנות עוד יותר. מקובל לחלק דקה ל- 60 חלקים שווים.
$\frac{1}{60}$ של דקה נקראת שנייה. אפשר לשוחח עם התלמידים על יחידות הזמן שדומות ליחידות המידה של הזוויות ושמותיהן זהים. את התלמידים המתעניינים בנושא אפשר להפנות למקורות מידע ולבקש מהם לספר בכיתה על מה שקראו (האם קיים קשר בין יחידות זמן לבין יחידות מידה של זוויות וכדומה). בתרבויות העתיקות (בבל וסומר) בסיס החישובים היה 60. הזמן הוגדר על-ידי זווית (שעון השמש), לכן יש קשר בין יחידות זמן לבין יחידות זוויות. במהפכה הצרפתית היה ניסיון להגדיר יחידה חדשה של זוויות (גרד או גון) המבוססת על המבנה העשרוני.

(זווית ישרה הייתה שווה ל- 100 גרדים, זווית שטוחה הייתה שווה ל- 200 גרדים, וסיבוב שלם היה שווה ל- 400 גרדים.) היחידה נקבעה בהתבסס על הגדרת המטר כחלק מהיקף כדור הארץ בקו המשווה (אורך קשת של 400 גרדים הוא 40,000 קילומטר). הניסיון נכשל, בין היתר, כי אין במערכת יחידות זו ייצוג נוח של זוויות שימושיות כמו 30^0 ו- 60^0.

בדוגמאות מובאות "מקרי קצה" –זווית של 0 מעלות וזווית של 180 מעלות.

משימות

אפשר לוותר על המשימות 18 ו- 19 בכיתות המתקדמות.

18 חזרה על הגדרת מדידה של זוויות.

19 כתיבת מדידה של זווית.

אפשר לבצע את המשימות 20– 22 בעל-פה.

20 תכונות השוויון של מדידות. לזוויות שוות יש מידה שווה. $\measuredangle \mathbf{HOP} = 45^\circ$.

21 **א** התשובות המידיות הן שבשעות 6^{00} ו- 18^{00} הזווית בין המחוגים שטוחה, אך קיימות שעות אחרות המתאימות לדרישה.

<u>הסבר דרך החישובים</u>: בכל התקדמות של שעה לאחר שעה 6^{00} מחוג השעות מתקדם. הוא עובר בין שתי שנתות של השעון, כלומר 30°. מחוג הדקות עובר 360°.

	שעה	דקה	5 דקות	6 דקות
מחוג הדקות	360°	6°	30°	36°
המחוג השעות	30°	0.5°	2.5°	3°

בשעה 7^{00} גודל הזווית בין המחוגים הוא 150°.

בשעה 7^{05} גודל הזווית בין המחוגים הוא 177.5°.

בשעה 7^{06} גודל הזווית בין המחוגים הוא 183°.

לכן בין השעות 7^{05} ו- 7^{06} מידת הזווית בין המחוגים היא 180° (פחות מחצי דקה לאחר 7^{05}).

התהליך חוזר על עצמו בכל שעה וחמש דקות בערך. לדוגמה, בשעה 8^{11} בערך, בשעה 11^{27} וכן הלאה 22 פעמים ביממה.

<u>הסבר אלגברי</u>: המשתנה $\boldsymbol{t}$ מייצג את אורך הזמן במספרים עשרוניים (דוגמאות: $3^{15}=3.25$, $5^{36}=5.6$).

במשך $\boldsymbol{t}$ שעות מחוג השעות עובר $30\cdot \boldsymbol{t}$ מעלות, ומחוג הדקות עובר $360\cdot \boldsymbol{t}$ מעלות. (מחוג הדקות עבר כמה סיבובים.) ההפרש $\mathbf{A}$ בין המחוגים הוא $\mathbf{A}=330\cdot \boldsymbol{t}$, כאשר $0\le \boldsymbol{t}\le 12$.

הזווית בין המחוגים היא 180° אם קיים $\boldsymbol{k}$ שלם כך ש- $\mathbf{A}=330\cdot \boldsymbol{t}=180\cdot \boldsymbol{k}$ ($0\le \boldsymbol{k}\le 21$), כלומר $\boldsymbol{t}=\frac{180}{330}\cdot \boldsymbol{k}=\frac{6}{11}\cdot \boldsymbol{k}$.

<u>דוגמאות</u>: אם $\boldsymbol{k}=1$, השעה היא $\frac{6}{11}\cdot 60=32\cdot\frac{8}{11}$ דקות, כלומר 32 דקות ו- $\frac{8}{11}$ של דקה (בערך 43 שניות). אם $\boldsymbol{k}=11$, השעה היא 6^{00}.

מידת הזווית בין המחוגים היא 90°. תשובות מידיות: בשעה 3^{00} ובשעה 9^{00}.

לפי החישוב האלגברי לעיל, $\mathbf{A} = 330 \cdot \boldsymbol{t} = 180 \cdot \boldsymbol{k} + 90$, $\boldsymbol{t} = \frac{180 \cdot \boldsymbol{k} + 90}{330} = 6 \cdot \boldsymbol{k} + \frac{3}{11}$.
אם $\boldsymbol{k} = 0$, השעה $\frac{3}{11}$ של שעה, כלומר $\frac{3}{11} \cdot 60 = 16\frac{4}{11}$, כלומר 16 דקות ו- 22 שניות.
אם $\boldsymbol{k} = 5$, השעה 3^{00}; אם $\boldsymbol{k} = 16$, השעה 9^{00}.

22 לא, כי מחוג הדקות נמצא בדיוק ב- 9, ומחוג השעות נמצא קצת לפני 12.

23 משימת יישום. שימוש במד-זווית למדידת זוויות. שימו לב, כי מודדים זוויות הקטנות מזווית שטוחה. יש להקדיש זמן, לפחות פעם אחת, לביצוע משימה זו ולוודא שכל תלמידי הכיתה מניחים את מד-הזווית בתנוחה נכונה, וכן שהם קוראים את מידת הזווית בצורה נכונה.

24 התלמידים מכירים את המושג *זווית בין קטעים*. קושי שיכול להתעורר במדידה הוא שהקטעים לא מגיעים ל"עיגול" של מד-הזווית. הזכירו לתלמידים ששוקי הזווית הן בעצם קרניים, והדריכו את התלמידים להמשיך את הקטעים לפי הצורך. מיומנות זו של מדידת זווית בין קטעים חשובה, כי בהמשך יידרשו התלמידים למדוד זוויות במשולש.

25 פיתוח מיומנות אומדן של גודל זווית. זווית הייחוס היא הזווית הישרה.

א $70°$ **ב** $150°$

ג $20°$ **ד** $90°$

26 את הזוויות פוסלים לפי היגיון. זווית **O** היא זווית שטוחה, לכן היא אינה יכולה להיות של $70°$. זווית **C** היא זווית ישרה (ההערכה מתבצעת על-ידי אומדן חזותי), לכן היא אינה יכולה להיות של $70°$. זווית **A** היא זווית קהה, לכן היא אינה יכולה להיות של $70°$. זווית **B** היא זווית חדה, אבל היא קטנה מחצי של זווית ישרה (לפי אומדן), לכן היא אינה יכולה להיות של $70°$. הזווית היחידה שנותרה היא זווית **S**. לאחר שמקשיבים לנימוקי התלמידים בודקים את ההשערות על-ידי מדידה.

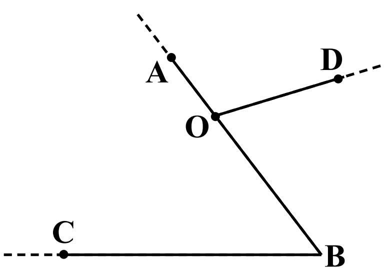
27 לעתים קרובות בחיי היום-יום יש צורך באומדן של אורכי קטעים ושל מידות זוויות. במשימה עוסקים בפיתוח מיומנות זו.

28 המילה "מעלה" מהשורש "ע–ל–ה" משמעותה "מדרגה".

מומלץ לתת את המשימות 29 – 30 כשיעורי בית.

29 פיתוח מיומנות שימוש במד-זווית.

30 פיתוח מיומנות שימוש במד-זווית (שתי זוויות על אותו סרטוט) וקריאה מדויקת של ההוראות. תלמידים צריכים לשים לב שלזוויות אין אותו קדקוד. בניית שתי זווית על אותו סרטוט.



31 פיתוח מיומנות. שימוש במד-זווית, כאשר אחת מהשוקיים נתונה.

32 שתי קרניים שיש להן קדקוד משותף יוצרות שתי זוויות שסכומם 360 מעלות. (הזוויות אינן מכסות אחת את השנייה)

א לא **ב** כן **ג** כן **ד** כן **ה** לא **ו** לא **ז** לא **ח** כן

33 פיתוח הבנת הנקרא על-ידי שילוב אוצר המילים של פעולות החשבון ושל הזוויות.

א זווית ישרה. **ב** זווית של 45°.

פיצוחים

34 פיתוח הבנה של מהות מדידה: בוחרים זווית יחידה ומודדים זווית ביחס ליחידה. כאשר זווית היחידה יחסית גדולה מידות הזוויות הן שברים.

2.ב השוואה בין זוויות הקטנות מזווית שטוחה

מגלים (עמ' 294)

התלמידים כבר מכירים כמה דרכי השוואה: העתקה של הזוויות על שני שקפים והנחת השקפים זה על גבי זה; שימוש בשתי מחוגות (פתיחת המחוגות כגודל הזוויות המוצגות); ומדידת הזוויות באמצעות מד-זווית. כל השיטות מוגדרות בפרק "לומדים" בעמ' 294 – 295.

לומדים (עמ' 294)

הפרק עוסק בשיטות להשוואה בין זוויות. ישנה חשיבות גדולה להתנסות של התלמידים בשיטות השונות. ההתנסות היא אמצעי המסייע בהבנת המושג "מדידת זווית", והיא נדרשת בתכנית הלימודים בעיסוק בגאומטריה קדם-דדוקטיבית.

משימות

35 טיפול בתפיסה שגויה. חשוב להדגיש לתלמידים כי "אורכי" שוקי הזווית אינם משפיעים על ההשוואה, כי השוקיים של זווית הן קרניים, וקרניים הן אין-סופיות.

36 מידות הזוויות קרובות, והשוקיים "קטנות", לכן השוואה באמצעות העתקה נוחה יותר. **א**–1, **ב**–1, **ג**–2.

37 גם כאן ההשוואה באמצעות העתקה נוחה יותר. זווית 2.

38 גם כאן ההשוואה באמצעות העתקה נוחה יותר. **A–D**, **F– C**, **G–B**, **L–H**.

39 משימת יישום. נימוק אי-שוויון של זוויות על-ידי העתקה.

40 הזוויות הישרות הן **PFN** ו- **NFJ**, הזווית השטוחה היא **PFJ**, והזוויות הגדולות מ- 180° הן **NFP** ו- **NFJ**. יש להניח שרוב התלמידים לא יחשבו על שתי הזוויות האחרונות.

41 **א** הכנה לשוויון זוויות קדקודיות. $\sphericalangle AOD$ ו- $\sphericalangle COB$, $\sphericalangle AOB$ ו- $\sphericalangle COD$.

ב דוגמה: $\sphericalangle COB \neq \sphericalangle COD$.

42 הבסיס של תורת הזוויות דרך הפעלה. זווית ישרה היא חצי מזווית שטוחה; כל הזוויות הישרות הן שוות. אפשר לנמק את השוויון על-ידי קיפול או על-ידי שימוש בנייר שקוף.

43 המשך המשימה הקודמת. כל הזוויות השטוחות הן שוות.

44 משימה פתוחה. תלמידים יכולים לסרטט מקרים "קיצוניים" כמו זווית שטוחה וזווית ישרה. אפשר לנמק את האי-שוויון על-ידי קיפול או על-ידי שימוש בנייר שקוף.

45 הקרן **BK** נמצאת בתוך הזווית.

ד תלמידים צריכים לכתוב את האי-שוויונות $\sphericalangle ABC \neq \sphericalangle KBA$ ו- $\sphericalangle ABC \neq \sphericalangle KBC$.
האי-השוויון השלישי (יכול להיות גם שוויון) תלוי בסרטוט שלהם. הכנה לסכום זוויות.

46 טיפול בתפיסה שגויה. חשוב לדון בעניין ולהגיע למסקנה שאין משמעות למושג *אורך* לגבי שוקיים של זווית, כי הן אין-סופיות. לכן הטענה אינה נכונה. חלקי השוקיים שרואים בסרטוט אינם משפיעים על גודל הזווית. משווים בין "מִפתחים" של זוויות.

47 פיתוח מיומנות העתקה. תלמידים יכולים למדוד את הזוויות או להשתמש בנייר שקוף.

48 חקירה ראשונה של המצב הקלסי של חיתוך ישרים מקבילים בחותך. שוויון בין זוויות שלא יילמדו במסגרת זוויות מתחלפות ומתאימות. אפשר להרחיב את המשימה בכיתות מתקדמות על-ידי בקשה למצוא קו סימטריה.

49 בדרך כלל לתלמידים חלשים יש נטייה להתעלם מזוויות "פנימיות". הדבר מוביל לקשיים בהוכחות קצת מורכבות.

קטנות מ- $90°$	גדולות מ- $90°$
EOB – DOE – COD – AOC	**AOB – COB – AOE**

ב.3. מיון זוויות

<u>מגלים (עמ' 298)</u>

בשיעור זה התלמידים חוזרים על השוואה ישירה בין זוויות הקטנות מזווית שטוחה: על זוויות חדות, על זוויות קהות, על זוויות ישרות ועל זוויות שטוחות. הנושא נלמד כבר בבית ספר יסודי בכיתות ג', לפיכך אוצר המילים מוכר. המונח "זווית נישאה" אינו מופיע בתכנית הלימודים החדשה, אך נדרש לציין ששתי קרניים יוצרות שתי זוויות שברוב המקרים אחת גדולה מזווית שטוחה. אפשר לדבר גם על זוויות גדולות מזווית שטוחה או להחליט שמתייחסים רק לזוויות שקטנות מזווית שטוחה. בכל מקרה, חשוב להתייחס לנקודה זו. מיון והשוואה מבצעים על-ידי הנחת זווית אחת על הזווית האחרת (או באמצעות העתקה). כל השוואה כזו מבוססת על כך שחלק משלם קטן מהשלם. יש להצטייד בדפים שקופים לצורך העתקת הזוויות.

לומדים (עמ' 298)

בחלק זה חוזרים על מושגים המוכרים מהלימוד בבית ספר יסודי: זווית חדה, זווית ישרה וזווית שטוחה. החידוש הוא בקשר בין ההיבט הגאומטרי (זווית הייחוס היא הזווית הישרה) לבין ההיבט המספרי (היחידה היא המעלה).
זווית חדה מוגדרת כזווית קטנה מזווית ישרה (וגדולה מ- 0 מעלות). כאשר מדברים על גודל הזווית בהקשר של שעון, חשוב לקחת בחשבון את התזוזה של מחוג השעות בכל פעם שהשעה אינה שלמה. חשוב להדגיש את הנושא בפני התלמידים (למשל, בשעה 12:05 הזווית בין המחוגים היא לא בדיוק 30 מעלות, אלא קצת פחות, כי גם המחוג הקטן זז). ראו משימות 22 – 23 בסוגיה "מדידות" ומשימות 55 – 58.
נוסף על זיהוי סוג זווית (חדה או קהה) מטרת המשימות 50 – 53 היא ניסוח הנימוקים. לדוגמה, זווית **KMN** היא זווית חדה כי היא קטנה מזווית ישרה (ולא כי היא כמו שפיץ)!

משימות

50 אפשר לבצע את המשימה בעל-פה. זיהוי זווית יחידה. לכיתות החלשות.

51 אפשר לבצע את המשימה בעל-פה. זיהוי זווית בסרטוט מורכב.

52 זיהוי זווית חדה לפי המידה, בלי סרטוט. נימוק על-ידי ההגדרה.

53 זיהוי זווית קהה לפי המידה, בלי סרטוט. נימוק על-ידי ההגדרה.

54 מיומנות סרטוט. לכיתות החלשות.

משימות 55 – 57: בשפה המדוברת קיים קשר בין שמות של שעות ושברים (השעה רבע לתשע במקום השעה 8^{45}). במשימות מרחיבים את הקשר לזוויות.

55 המחשת זוויות בין קטעים על-ידי השעון. מתייחסים לזוויות קטנות מזווית שטוחה.
דוגמאות לזוויות חדות: 2^{15} , 10^{55}; דוגמאות לזוויות קהות: 2^{45}, 9^{10}.

56 שאלת יחס. הנימוק: ב- 12 שעות מחוג השעות עובר סיבוב של 360 מעלות. בשעה הסיבוב הוא של 30 מעלות, בשעתיים 60 מעלות, בשש שעות 180 מעלות, בחצי שעה 15 מעלות.

57 שאלת יחס. הנימוק: בשעה מחוג הדקות עובר סיבוב של 360 מעלות, בחצי שעה הסיבוב הוא של 180 מעלות, בחמש דקות 30 מעלות, ברבע שעה 90 מעלות.

58 הקשר בין שני ההיבטים של הגאומטריה. במקרה זה הזווית נתונה במונחים של גאומטריה "טהורה" (זווית ישרה), ומתבקשים חישובים בשברים. יש תלמידים שיענו מיד, אחרים יתרגמו את ההיגד במעלות.
ג הזווית גדולה מ- $180°$ ($135°$).

59 מבצעים את המשימה בעל-פה. בקשו מהתלמידים לומר מה מידת הזווית ומה סוגה.

60 מבצעים את המשימה בעל-פה. בקשו מהתלמידים לומר מה סוג הזווית. זוויות חדות: $36°$, $89°$, $1°$, $30°$, $60°$, $45°$. זוויות קהות: $120°$, $91°$, $179°$, $150°$, $135°$. מידתה של זווית ישרה היא $90°$. מידתה של זווית שטוחה היא $180°$.

פיצוחים

61 קיימות כמה דרכים לחשב את מידות הזוויות.

הזווית בין שתי שעות סמוכות היא $30°$. בכל שעה "עגולה" מחוג הדקות נמצא בדיוק מול השנת 12, ומחוג השעות בדיוק מול שנת השעה. לכן בשעה 2^{00} ובשעה 10^{00} הזווית בין המחוגים היא $30°$.

מובן שקיימות שעות אחרות המתאימות לדרישה.

בחצי של כל שעה מחוג הדקות נמצא בדיוק מול השנת 6.

בחצי שעה מחוג השעות עובר זווית של $15°$, לכן בשעה 12^{30} מידת הזווית בין המחוגים היא $165°$. בארבעים דקות מחוג השעות עובר זווית של $20°$. בין השנתות 8 (מחוג הדקות) ו- 10 יש זווית של $60°$. לכן בשעה 10^{40} מידת הזווית בין המחוגים היא $80°$.

ברבע שעה מחוג השעות עובר זווית של $7° 30'$, לכן בשעה 9^{15} מידת הזווית בין המחוגים היא $172° 30'$. בשעה 2^{15} מידת הזווית בין המחוגים היא $220° 30'$.

ג. זוויות ופעולות

ג.1. סכום והפרש של זוויות

מגלים (עמ' 301)

חשיבות המיקום של קרן משותפת בין שתי זוויות. הקרן המשותפת יכולה להיות בצד, יחסית לשוקיים האחרות או בין השוקיים. חשוב שהקרן המשותפת תשמש כשוק של כל אחת מהזוויות. הפנו את תשומת לב התלמידים לכך שלפי שמות הזוויות אפשר לדעת מהי הקרן המשותפת.

א הקרן **BC** נמצאת בין הקרניים **BA** ו- **BD**.

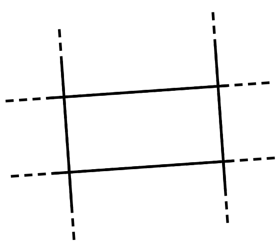
ב לזווית **ABC** ו- **CBD** קרן משותפת – **BC**.

ג לזווית **ABC** ו- **ABD** קרן משותפת – **AB**.

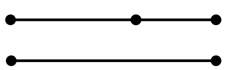
לומדים (עמ' 301)

סכום והפרש של זוויות. המושגים חדשים ומופשטים יחסית.

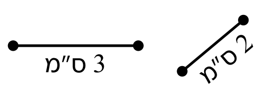
כידוע, לגאומטריה שני היבטים: ההיבט הקשור להגדרות ולתכונות של הצורות, וההיבט הקשור לפעולות ולמדידות. דוגמאות:



- "שטח המלבן" יכול להיות **צורה** (חלק של המישור המוגבל על-ידי שני זוגות של ישרים מאונכים זה לזה) או **מספר** (מכפלת מידות הצלעות). במקרה זה אין הרבה מקום לטעות.
- סכום **קטעים** יכול להיות **קטע** (לקטעים קצה משותף)



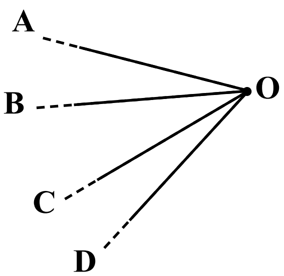
או **סכום המדידות**.



רואים שבמקרה זה שני הרבדים שונים.

באופן דומה סכום של זוויות יכול להיות **זווית** (סכום הזוויות) או מספר (סכום המידות).
אם מתכוונים לסכום הזוויות כזווית, צריך לומר מהו הקדקוד ומה הן השוקיים.
ההגדרה הפורמלית היא שאם לשתי זוויות יש קדקוד משותף, שוק משותפת והשוקיים האחרות נמצאות בשני צדי השוק המשותפת, סכום הזוויות הוא זווית שקדקודה הוא הקדקוד המשותף, והשוקיים שלה הן השוקיים הלא-משותפות. אין צורך לציין בפני התלמידים את ההגדרה הפורמלית, אך בהסבר חשוב להתייחס לשני ההיבטים – ההיבט של צורת הזווית וההיבט של גודל הזווית. בלועזית קיים המונח "adjacent angles", המאפיין את הזוויות האלה.

חשוב להדגיש שוב את המושג של "מידת הזווית", והיכן מחפשים את מידת הזווית בסרטוט. חשוב להבין שמדובר במפתח ללא קשר לאורך הקרניים. כמו-כן יש לוודא שלשתי הזוויות יש שוק משותפת (פנימית או חיצונית). כדי להקל את הזיהוי של הסכום או של ההפרש, יש להדגיש כי הסכום תמיד גדול מכל אחת מהזוויות, וההפרש תמיד קטן מאחת מהזוויות לפחות.



צריך לשים לב לסדר הנכון של הכתיבה, כך שהקדקוד ייכתב באמצע.
יש להביא מספר דוגמאות לחידוד המושגים "סכום" ו"הפרש" של שתי זוויות.
למשל, בסרטוט שלפניכם הזווית **AOD** היא הסכום של הזוויות **AOB** ו- **BOD** (קיימות אפשרויות אחרות).
אין צורך לבקש מהתלמידים לבנות סכום או הפרש של זוויות נתונות (אפשר לבקש רק מתלמידים מתקדמים). חשוב שיידעו לזהות סכום והפרש שמופיעים בסרטוט. יש להדגיש את קווי הדמיון של סכום והפרש של זוויות לעומת סכום והפרש של קטעים שנלמדו בעבר. מומלץ לצבוע את השוק המשותפת.

משימות

62 משימה קלה. למעשה, תלמידים מתחילים מהסוף. תחילה הם מסרטטים זווית שטוחה (הסכום) וקרן בעלת אותו קדקוד.

63 משימה קלה. גם כאן מסרטטים תחליה זווית ישרה (הסכום) וקרן בעלת אותו קדקוד, אך הפעם הקרן חייבת להיות בין השוקיים של הזווית הישרה. בכיתות מתקדמות אפשר לשאול מהו ההבדל בין שתי המשימות. בלועזית קיים מונח המאפיין זוויות שסכומם זווית ישרה (complementary).

64 תלמידים יכולים להשלים את הסרטוט שבמשימה 62 עם קרן, אך הפעם הקרן חייבת להיות בין השוקיים של אחת מהזוויות הקטנות מזווית שטוחה.

65 הכללה אלגברית של סכום מידות זוויות. המידה של זווית הסכום היא $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{k})^\circ$.

66 שילוב ההיבט הגאומטרי וההיבט המספרי של סכום זוויות. לפי ההגדרה, הסרטוט אינו נכון.

67 מומלץ לסרטט את הסרטוט על הלוח ולבקש מהתלמידים לנמק את עמדתם. א', ג', ו- ח' לא נכונים.

68 קריאת סרטוט. מומלץ לסרטט את הסרטוט על הלוח ולבקש מהתלמידים לנמק את תשובתם.
דוגמאות: $\sphericalangle \mathbf{BAL} = \sphericalangle \mathbf{BAP} + \sphericalangle \mathbf{PAL} = \sphericalangle \mathbf{BAM} + \sphericalangle \mathbf{MAL}$
$\sphericalangle \mathbf{LAM} = \sphericalangle \mathbf{CAM} - \sphericalangle \mathbf{CAL} = \sphericalangle \mathbf{BAL} - \sphericalangle \mathbf{BAM}$

69 קריאת סרטוט. מומלץ לסרטט את הסרטוט על הלוח ולבקש מהתלמידים לנמק את תשובתם.
$\sphericalangle \mathbf{AOP} = \sphericalangle \mathbf{AOS} + \sphericalangle \mathbf{POS}$
$\sphericalangle \mathbf{AOS} = \sphericalangle \mathbf{AOP} + \sphericalangle \mathbf{SOP}$
$\sphericalangle \mathbf{POS} = \sphericalangle \mathbf{AOP} + \sphericalangle \mathbf{AOS}$
יש להפנות את תשומת לב התלמידים לכך שהקשרים בין חיבור זוויות וחיסור זוויות הם כמו הקשרים בין חיבור מספרים וחיסור מספרים.

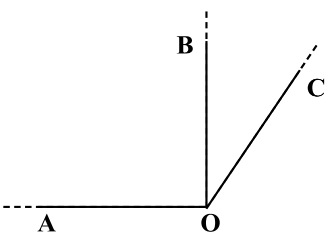
70 יישום סכום הזוויות במלבן. אפשר לוותר על המשימה בכיתות המתקדמות.

71 שילוב אלגברה וגאומטריה. מיומנות של כתיבת ביטויים אלגבריים בגאומטריה תהיה הכרחית בהמשך הלימודים. שילוב תחומים מהווה קושי אף-על-פי שהמשימה קלה.

72 שוויון הזוויות הוא נתון מיותר בשאלה .
א יש תלמידים שיכתבו $\sphericalangle \mathbf{AOB} = 2 \cdot \sphericalangle \mathbf{AOK}$. כתיבה זו מקובלת, אך שייכת לתחום המספרי אם הכוונה היא "מידת זווית **AOB** שווה לפעמיים מידת הזווית **AOK**".

73 משימה שמומלץ לבצע על לוח מחיק. קיימות שתי אפשרויות. הקרניים **CA** ו- **CD** יכולות להיות בשני הצדדים של **CO**, והזווית **AOD** תהיה זווית שטוחה. אם הקרניים באותו צד, $\sphericalangle \mathbf{AOD} = 60°$.

74 יישום תכונות השוויון בזוויות.
אם מוסיפים זווית שווה לזווית נתונה, מתקבלות זוויות שוות.
אחת מהזוויות חייבת להיות גדולה מ- $90°$.
דוגמה: $\sphericalangle \mathbf{AOB} = \sphericalangle \mathbf{AOC} - \sphericalangle \mathbf{COB}$.



75 משימה לשיעורי בית. שילוב שני ההיבטים של סכום זוויות: מדידה וסרטוט.
$\sphericalangle \mathbf{A}_1 = 30°$ $\sphericalangle \mathbf{A}_2 = 40°$ $\sphericalangle \mathbf{A}_1 = 80°$

76 משימה לשיעורי בית. קריאת מדידות בסרטוט, זיהוי זווית נתונה וחישובי הפרש וסכום של זוויות.

77 אפשר לבצע את המשימה בעל-פה בכיתה.

78 התחלה של הוכחה פורמלית. בכיתות המתקדמות אפשר לבקש לכתוב את כל ההוכחה:
$\sphericalangle \mathbf{AOC} = 180° = \sphericalangle \mathbf{AOF} + \sphericalangle \mathbf{FOC}$
$\sphericalangle \mathbf{FOC} = 120° \Rightarrow \sphericalangle \mathbf{AOF} = 60° \Rightarrow \sphericalangle \mathbf{BOF} = 30°$
$\sphericalangle \mathbf{BOK} = \sphericalangle \mathbf{BOF} + \sphericalangle \mathbf{FOK} = 30° + 60° = 90°$
בכיתות חלשות יותר אפשר לבקש את ההוכחה בעל-פה או בעזרת קיפול.
חשוב להסביר לתלמידים את ההבדל בין **סכום המידות**, שאינו בהכרח זווית, לבין זווית שהיא סכום של זוויות.

79 התכונה המוצגת במשימה – "סכום הזוויות מסביב לנקודה הוא $360°$ אם הזוויות אינן מכסות זו את זו" – שימושית מאוד בהוכחות (סכום הזוויות במצולע).

80 לא. אפשר לומר שסכום מידות הזוויות הוא $180°$. חשוב להסביר לתלמידים את ההבדל בין **סכום המידות**, שאינו בהכרח זווית, לבין זווית שהיא סכום של זוויות.

81 לא. לזוויות אין קדקוד משותף, לכן הן אינן יוצרות זווית שטוחה, אך סכום מידות הזוויות הוא $180°$.

82 היגד א' הוא הנכון.

פיצוחים

83 סרטוט באילוצים.

הקושי הוא להבין ש**לכל** זוג יש שוק משותפת.

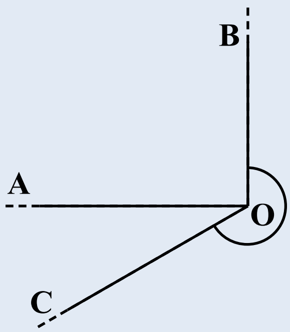
דוגמאות:

לזוויות $\measuredangle AOC$ ו- $\measuredangle AOB$ יש שוק משותפת AO;

לזוויות $\measuredangle BOC$ ו- $\measuredangle AOB$ יש שוק משותפת BO;

הזווית BOC גדולה מ- $180°$;

לזוויות $\measuredangle BOC$ ו- $\measuredangle AOC$ יש שוק משותפת CO.



84 שילוב אלגברה וזוויות. $\measuredangle AOC = 64°$

ג.2. חוצה-זווית

<u>מגלים (עמ' 306)</u>

1 אפשר לחלק זווית לשתי זוויות שוות על-ידי העתקת הזווית על נייר שקוף וקיפול הנייר.
דרך נוספת – מדידת הזווית הנתונה באמצעות מד-זווית וחישוב מחצית ממנה.

2 המידה של זווית סכום הזוויות גדולה פי שניים מכל אחת מהזוויות המרכיבות אותה.
מומלץ להזכיר כיצד אפשר לוודא ששתי הזוויות שוות. (העתקה לנייר שקוף והנחת הזוויות זו על זו או מדידה על-ידי מד-זווית.)

<u>לומדים (עמ' 306)</u>

בהגדרה של חוצה-זווית ישנם שני תנאים שיש להדגיש: הקרן חייבת לצאת מקדקוד הזווית ולחלק את הזווית לשתי זוויות שוות. בהמשך מובאת דרך לבנות חוצה-זווית באמצעות קיפול נייר. אפשר לבנות חוצה-זווית גם באמצעות מד-זווית.

מושג זה נלמד כעת, ללא קשר למשולשים, וזאת מכמה סיבות:

א רוב התלמידים סבורים בטעות ש"חוצה-זווית" קיים **רק** במשולש;

ב המושגים *חוצה-זווית של זווית במשולש* ו*חוצה-זווית של זווית במרובע* מבוססים על המושג *חוצה-זווית* של זווית כלשהי;

ג מושג זה חשוב לפתרון שאלות כלליות הקשורות למשולשים ולמרובעים;

ד לחוצה-זווית במשולש תכונות מיוחדות הנלמדות מאוחר יותר.

מומלץ לדון עם התלמידים בדרכים שונות שבהן אפשר לחלק זווית לשתי זוויות שוות. בכל מקרה אפשר לבנות חוצה-זווית של זווית בכמה דרכים.

א **בעזרת קיפול.** מסרטטים זווית על דף, מקפלים את הדף כך ששתי שוקי הזווית יתלכדו, וקו הקיפול יעבור דרך קדקוד הזווית. פורסים את הדף. קו הקיפול הוא קו הסימטריה של הזווית, והוא מחלק את הזווית לשתי זוויות שוות. החלק של קו הקיפול (הקרן) המתחיל בקדקוד הזווית והעובר בין שוקיה של הזווית, הוא חוצה-הזווית. אפשר לבדוק את שוויון הזוויות שהתקבלו בקיפול על–ידי הנחת חלקי הזווית זה על-גבי זה.

ב **מדידה במד-זווית.** מודדים זווית ומחלקים את מידתה ב- 2. ליד מד-הזווית, בְּמָקום מתאים, מסמנים נקודה ומעבירים קרן. כך מתקבלות שתי זוויות שוות. סביר שהתלמידים זוכרים כיצד למדוד זווית בעזרת מד-זווית ויהיו כאלה שיציעו דרך זו.

השוק המשותפת של הזוויות מחלקת את זווית הסכום לשתי זוויות שוות. לכן זווית הסכום גדולה פי שניים מכל אחת מהזוויות הנתונות.

בתוך כדי פעילויות הגילוי מלמדים את התלמידים את המושג "חוצה-זווית". חשוב להקפיד לסרטט חוצה-זווית כקרן, ולא כקטע. תכונה חשובה של חוצה-זווית היא שהוא חלק מקו הסימטריה של הזווית, לכן קיפול לאורך חוצה-הזווית מוביל לכך ששתי הזוויות שמתקבלות מתלכדות בקיפול.

מיומנויות נוספות שיש לפתח הן קואורדינציה בין העין ליד ואומדן על-ידי סרטוט חוצה-זווית ללא כלים.

מיומנויות אלה מפתחות מיומנות נוספת חשובה להמשך הדרך: קריאת סימונים ושימוש נכון בהם.

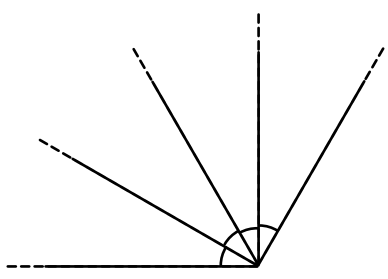
בסרטוט מסמנים באותו סימון את שתי הזוויות השוות (גם אם במציאות הן אינן באמת שוות), ומתייחסים לקרן שיוצאת מהקדקוד כחוצה-הזווית על כל תכונותיו.

חשוב להרבות בחישובים בעל-פה. דוגמאות: מידת חצי של זווית היא $12°$, מהי מידת הזווית? זווית שמידתה $105°$ חולקה לשתי זוויות שוות, מה מידתה של כל אחת מהזוויות השוות?

משימות

85 לכיתות חלשות. אפשר להעתיק את הסרטוט לדף שקוף ולקפלו לאורך הקרן **KM** בדיוק האפשרי. אם שתי שוקי הזווית יתלכדו, הקרן **KM** תהיה חוצה-זווית, ולא – הקרן אינה חוצה-זווית.

86 תלמידים יכולים לומר שמידת הזווית היא $120°$. לאחר סרטוט וסימון מתאים הם יראו ששלוש מחמש הקרניים הן חוצי-זווית.



87 יישום אלגברי של המשימה הקודמת. $4 \cdot a$.

88 אפשר לבצע את המשימה בעל-פה. $\measuredangle AOD = 32°$.

89 לשיעורי בית. המשימה מעודדת "עבודה בידיים".

90 פיתוח מיומנות סרטוט.

91 בכל סעיף הקרן Cd אינה חוצה-זווית, כי היא אינה מתחילה בקדקוד הזווית.

92 הקרן שיוצאת מקדקוד הזווית תהיה חוצה-זווית רק אם היא מחלקת את הזווית לשתי זוויות שוות. כלומר לפי נתוני המשימה הקרן לא חייבת להיות חוצה-זווית.

93 החישובים במשימה נובעים מהתהליך שהוצג במשימה 78. תשובה ד'.

94 פיתוח מיומנות סרטוט באילוצים. מודגש ההבדל בין פיתוח חשיבה מופשטת לבין עבודה בפועל.

95 הכללת הנלמד בעזרת משתנה. $\sphericalangle MOA = \frac{x}{2}$

96 יישום אלגברי של המשימה הקודמת. $\frac{x}{2}$

97 המשימה עלולה לעורר קושי אצל התלמידים עקב מורכבותה. מומלץ להעתיק את הסרטוט למחברת ולסמן זוויות שוות בסימון זהה. לאחר מכן אפשר לענות על השאלות ביתר קלות.

א $\sphericalangle BAP = \sphericalangle PAM = \sphericalangle MAL = \sphericalangle LAC$; $\sphericalangle BAM = \sphericalangle PAL = \sphericalangle MAC$; $\sphericalangle BAL = \sphericalangle PAC$.

ב כן. **ג** פי 4. **ד** פי 2. **ה** כן.

98 **א** זווית שטוחה; **ב** לא, כי סכום הזוויות יהיה גדול מ- $180°$; **ג** זווית חדה, זווית ישרה או זווית קהה;

ד כל זווית הגדולה מזווית שטוחה. כדי לסרטט חוצה-זווית של זווית כזו די לסרטט חוצה-זווית של הזווית המשלימה אותה ל- $360°$ ולהמשיך את הקרן מעבר לקדקוד הזווית. הקרן שהיא המשך חוצה-הזווית הקטנה מ- $180°$ תהיה חוצה-הזווית של הזווית הנתונה.

99 לשיעורי בית. פיתוח מיומנות סרטוט.

במשימות 100 ו- 101 מובאת דרך העשייה. אחד מההבדלים בין ריבוע לבין מלבן שאינו ריבוע: בריבוע האלכסונים חוצים את הזוויות, כלומר הם קווי סימטריה, ובמלבן שאינו ריבוע – לא.

100 בכל הריבועים מידתה של הזווית שקרניה הן צלע ואלכסון היוצא מקודקוד הצלע, היא $45°$.

101 מטרת המשימה היא לטפל באחת התפיסות השגויות הנפוצות. תלמידים רבים חושבים שאלכסוני המלבן חוצים את הזוויות.

פיצוחים

102 הבנת הנקרא. התהליך הפוך לזה שבמשימה 78. הזווית היא זווית שטוחה.

ד. זוויות וישרים

ד.1. זוויות צמודות

במדור זה חוקרים סוגי זוויות הנוצרות בין שני ישרים (זוויות קדקודיות וזוויות צמודות) ובין שלושה ישרים (זוויות מתאימות וזוויות מתחלפות). קשרים בין זוויות וישרים הם בסיס של אין-ספור הוכחות בגאומטריה. בכיתה ז' לומדים את ההגדרות, ורוב המשימות הן משימות חישוב המחזקות את הבנת הקשרים. בכיתות גבוהות יותר ישתמשו בהגדרות להוכחות פורמליות.

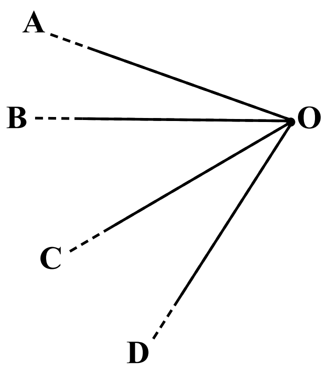
אחד מהמכשולים בהבנת המושג "זוויות צמודות" נובע ממשמעות המילה "צמוד". חלק מהתלמידים סבורים שמספיק שלשתי זוויות יהיה קדקוד משותף, ותהיה שוק משותפת הנמצאת בין השוקיים האחרות, כדי שהזוויות יהיו "צמודות".

מגלים (עמ' 309)

1 מציירים זווית שטוחה. סכום הזוויות הוא $180°$.

2 סרטטנו שתי זוויות בעלות שוק משותפת, והשוקיים הנותרות יוצרות זווית שטוחה. סכום כל שתי זוויות שיוצרות זווית שטוחה הוא $180°$.

לומדים (עמ' 309)



הגדרה של זוויות צמודות. קיימים שני תנאים הכרחיים: שוק משותפת אחת בין שתי הזוויות, והשוקיים האחרות יוצרות זווית שטוחה. המושג "זוויות צמודות" הוא מושג בסיסי וחשוב להמשך הלימודים, ולכן יש לוודא שהובן היטב. לצורך זה יש להביא דוגמאות ש"לא עומדות באחד התנאים", ולבקש לנמק מדוע הזוויות אינן צמודות.

לדוגמה, האם הזוויות **AOB** ו- **BOD** צמודות? (לא, כי זוויות אלה אינן עומדות בתנאי השני: השוקיים אינן יוצרות זווית שטוחה.)

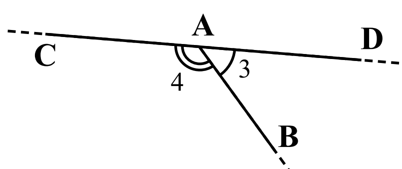
תלמידים עשויים להתקשות גם בזיהוי זוויות שיש להן שוק משותפת, וכן בסרטוט זוויות. הקושי בא לידי ביטוי בזיהוי שגוי של זוויות 1 ו- 2 (סרטוט ב') כשתי זוויות בעלות שוק משותפת. הדבר אינו נכון, כי שוק של זווית היא קרן, ולכן שוק משותפת של זוויות היא קרן משותפת, ולא קטע. כדי למנוע את הקושי בזיהוי שוק משותפת מומלץ להמשיך את שוקי הזווית כך שיהיה ברור ששוקי הזווית הן קרניים, ולא קטעים.

סרטוט א'

לשתי הזוויות 3 ו- 4 יש שוק משותפת **AB**.

השוקיים של ∢3 הן הקרניים **AD** ו- **AB**.

השוקיים של ∢4 הן הקרניים **AC** ו- **AB**.

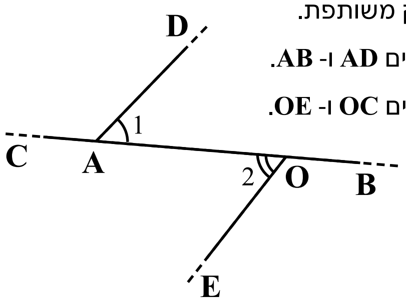


סרטוט ב'

לשתי הזוויות 1 ו- 2 אין שוק משותפת.

השוקיים של ∢1 הן הקרניים **AD** ו- **AB**.

השוקיים של ∢2 הן הקרניים **OC** ו- **OE**.



חשוב שהתלמידים יזכרו את התכונה של זוויות צמודות: סכום זוויות צמודות שווה ל- $180°$. התכונה נובעת מההגדרה של זוויות צמודות. הנימוק מבוסס על המושג *סכום שתי זוויות* שנלמד בפרק 6. מההגדרה עולה שאין אפשרות שיותר משתי זוויות יהיו צמודות.

סיכום השיעור – חשוב שהתלמידים יתרגלו ניסוחים שונים לתכונה של זוויות צמודות: זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- $180°$; סכום מידות של זוויות צמודות שווה ל- $180°$; זוויות צמודות משלימות זו את זו לזווית שטוחה; סכום זוויות צמודות שווה לזווית שטוחה.

אם מוסיפים תרגול, חשוב לסרטט זוויות צמודות במצבים שונים במישור, לאו דווקא באב-טיפוס.

משימות

103 זוהי שאלה ראשונה בסדרת השאלות העוסקות בחישובי מידות זוויות צמודות. שאלות כאלה הן שאלות מסורתיות בנושא. פתרון נשען על העובדה כי סכום זוויות צמודות הוא $180°$.
אפשר לפתור שאלה זו בעל-פה. אם פותרים אותה בכתב, אין לדרוש מהתלמידים כתיבה פורמלית של הפתרון.

104 שאלה דומה לשאלה הקודמת. הזווית הנתונה היא קהה. $28°$.

105 $5°$. בדרך כלל תלמידים לא נחשפים לזוויות "קטנות" וגם לא "מדמיינים" אותן.

106 הבנת הנקרא (אין סרטוט). לכל זווית שני מאפיינים (זוויות צמודות **ושוות**), לכן הזוויות ישרות.

107 בעל-פה: "סכום שתי הזוויות הוא $180°$, והן שוות, לכן כל אחת היא זווית ישרה".

108 נקודת חיתוך של האלכסונים היא קדקוד של ארבעה זוגות של זוויות צמודות:
$\sphericalangle \mathbf{PSA}$ ו- $\sphericalangle \mathbf{ASR}$; $\sphericalangle \mathbf{SRI}$ ו- $\sphericalangle \mathbf{ASR}$; $\sphericalangle \mathbf{SRI}$ ו- $\sphericalangle \mathbf{ISP}$; $\sphericalangle \mathbf{ISP}$ ו- $\sphericalangle \mathbf{PSA}$.

109 חשוב שהתלמידים יסבירו על-סמך איזו עובדה גאומטרית אפשר לכתוב את המשוואה לפתרון השאלה. מומלץ ללמד את התלמידים לכתוב את פתרון השאלות באופן מסודר. להלן אפשרות לכתיבת הפתרון.
$180° = \alpha + 125°$, כי שתי הזוויות הנתונות הן זוויות צמודות (סכומן שווה ל- $180°$).
$\alpha = 180° - 125° = 55°$. תשובה: $\alpha = 55°$.

110 תלמידים יכולים לחשב את הזוויות ולהשוות ביניהן, והם יכולים לומר ש- $30° < 40°$, לכן הזווית הצמודות בכיוון ההפוך $\alpha > \beta$.

111 מומלץ לבצע את המשימה בעל-פה. כמובן, לא כל שתי זוויות הן זוויות צמודות. בכל סעיף חסר אחד התנאים או שניהם. בסעיף א' שתי שוקיים של הזוויות יוצרות ישר, אך אין לזוויות שוק משותפת. בסעיף ב' לשתי זוויות יש שוק משותפת, אך שתי השוקיים האחרות לא יוצרות ישר. בסעיף ג' אף אחד משני התנאים אינו מתקיים.

112 תלמידים יכולים להשתמש בנימוקים שבשאלה הקודמת כדי להראות שרק בסעיף ב' הזוויות צמודות.

113 המשך של המשימות הקודמות. אפשר לבצע את המשימה בעל-פה. בכל סעיף חסר אחד התנאים או שניהם. בסעיף א' לשתי זוויות יש שוק משותפת, אך שתי השוקיים האחרות לא יוצרות ישר. בסעיף ב' שתי שוקיים של הזוויות יוצרות ישר, אך אין לזוויות שוק משותפת. בסעיף ג' אין לזוויות קדקוד משותף, בסעיף ד' שתי שוקיים של הזוויות אינן יוצרות ישר.

114 נימוק אפשרי: איננו יודעים אם לזוויות שוק משותפת וצלע משותפת, וגם אם כן, מידה של זווית שטוחה היא $180°$ ולא $180°$.

115 בסעיפים א' ו- ב' אפשר להסביר בעל-פה שלא מתקיים התנאי של זוויות צמודות (סכום הזוויות קטן/גדול מ- $180°$).

116 לא נתונות מידות של זוויות כדי להראות שמדובר במקרה כללי.
התלמידים יכולים לנמק את התשובה $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2\alpha$ על-ידי תכונות השוויון.

117 הכללה של השאלה הקודמת.

118 התלמידים כבר הוכיחו מאונכות של חוצי-זווית של זוויות צמודות במשימה 78, אך שם לא השתמשו במונח זוויות צמודות. לגבי הקיפול: מקפלים פיסת נייר ומקבלים קו ישר, קובעים עליו נקודה, ומסרטטים קרן. התקבלו שתי זוויות צמודות. על השוק המשותפת מניחים על-ידי קיפול כל אחת משוקי הזוויות הצמודות. למעשה, בשני קיפולים אלה חצינו את שתי הזוויות הצמודות. קיבלנו זווית ישרה.

119 תלמידים צריכים לסרטט זווית חדה. הם יכולים להאריך את אחת מהשוקיים.

120 המשך המשימה הקודמת והכללתה (לא מבקשים לסרטט **רק** זווית חדה) לשוויון שתי זוויות הצמודות לאותה זווית.

121 קשר בין זוויות צמודות ואלגברה. מידות הזוויות: $125°$ ו- $55°$.

122 קשר בין זוויות צמודות ואלגברה. מידות הזוויות: $70°$ ו- $110°$.

123 קשר בין זוויות צמודות ואלגברה. ד'.

פיצוחים

124 הכללה של משימה 110. אם $\alpha > \beta$, $180 - \alpha < 180 - \beta$.

ד.2. זוויות קדקודיות

מגלים (עמ' 312)

בפעילויות הגילוי מובע הקשר בין זוויות צמודות (הזוויות הם זוויות בין קרניים) וזוויות קדקודיות (זוויות בין ישרים).

1 2 זוגות של זוויות שוות: זוויות **FKG** ו- **LKS** שוות; זוויות **FKL** ו- **GKS** שוות.

2 **א** גם כאן יש שני זוגות של זוויות שוות.
ב יש ארבעה זוגות של זוויות צמודות.

לומדים (עמ' 312)

בשיעור לומדים מושג חדש ובסיסי – "זוויות קדקודיות". חשוב להדגיש שבמפגש של שני ישרים נוצרים שני זוגות של זוויות קדקודיות שוות וארבעה זוגות של זוויות צמודות. בהתחלה מומלץ להרגיל את התלמידים לחפש את הזוויות הקדקודיות ואת הזוויות הצמודות בכל חיתוך של שני ישרים – דבר שיעזור מאוד בהמשך לימוד המקצוע.
קיימות הגדרות שונות של המושג. נבחרה הגדרה שלא תלויה בזוויות צמודות, והיא הגדרה אופרטיבית. לפי הגדרה זו אפשר לבנות זוויות קדקודיות כך: בונים זווית כלשהי ו"ממשיכים" את שוקיה מעבר לקדקוד הזווית. כך מתקבלים שני ישרים נחתכים, ובו-זמנית נוצרת הזווית הקדקודית לזווית הנתונה. כדי שהתלמידים יבינו את הגדרת המושג מומלץ להסביר להם מה הן שוקיים "נגדיות": יש להן התחלה משותפת, הן חלק באותו ישר, והן מגדירות כיוונים שונים. כדאי להזכיר שקרן מגדירה כיוון על ישר.
חשוב להסב את תשומת לבם של תלמידים לסימון הזוויות. יש לסמן את הזוויות השוות במספר קשתות שווה (או בכל סימון זהה אחר) ואת הזוויות הלא-שוות במספר קשתות שונות. יש להיזהר מסימון של כל הזוויות באותו אופן כדי למנוע את אי-הבנת הנתונים.

משימות

125 מומלץ לבצע את המשימה בעל-פה. תרגול ההגדרות של זוויות קדקודיות ושל זוויות צמודות.

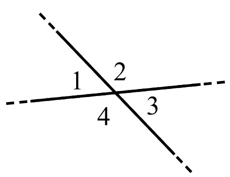
126 מומלץ לבצע את המשימה בעל-פה ולנמק את הקביעה אם הזוויות קדקודיות או לא.

127 מומלץ לבצע את המשימה בעל-פה. מודגש ההבדל בין ישר לבין קרן. לזוויות קדקודיות אין שוק משותפת, אך השוקיים שלהן נמצאות על אותם ישרים.

128 משימת יישום. תחילה מסרטטים זוויות קדקודיות; אחר-כך מודדים את הזוויות בעזרת מד-זווית. הדריכו את התלמידים למדוד בדיוק האפשרי כדי למנוע סטיות הנובעות מאופן המדידה.

129 הסרטוט מוביל להגדרה "מעשית" של זוויות קדקודיות.

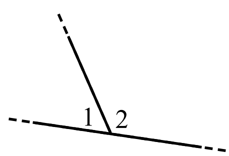
130 זיהוי זוויות קדקודיות בסרטוט נתון. הקושי הוא בכתיבת הזוויות בעזרת אותיות. בסעיף ב' כל שני ישרים יוצרים זוויות קדקודיות. במבט ראשון יש שלושה זוגות של זוויות קדקודיות, אך קיימים זוגות נוספים של זוויות קדקודיות, כגון $\sphericalangle \mathbf{EOA}$ ו- $\sphericalangle \mathbf{DOB}$, $\sphericalangle \mathbf{AOC}$ ו- $\sphericalangle \mathbf{NOD}$, $\sphericalangle \mathbf{EOC}$ ו- $\sphericalangle \mathbf{NOB}$.



131 סרטוט, סימון וזיהוי של זוויות קדקודיות ושל זוויות צמודות. התלמידים נוכחים לדעת שבסרטוט זוויות קדקודיות נוצרים ארבעה זוגות של זוויות צמודות. (1,2), (2,3), (3,4), (4,1) ושני זוגות של זוויות קדקודיות (1,3), (2,4).

132 נוסף על פיתוח מיומנות של סרטוט זווית שמידתה נתונה, יגלו התלמידים שאין צורך במדידה נוספת ליצירת הזווית השנייה; מספיק להאריך את השוקיים של הזווית המסורטטת.

133 מומלץ לבצע את המשימה בעל-פה. זיהוי זוויות צמודות וקדקודיות באותו סרטוט.



134 אין הכרח שבסרטוט של מרים יהיו זוויות קדקודיות.
לדוגמה, בסרטוט זה זוויות 1 ו- 2 הן זוויות צמודות, אך בסרטוט אין זוויות קדקודיות.

135 מומלץ לבצע את המשימה בעל-פה.
מומלץ לשאול בכל סעיף איזה תנאי לא מתקיים (הזוויות אינן זוויות בין ישרים, הקרניים אינן בהמשכיות, אין קרן משותפת).

לומדים (עמ' 314)

זוויות קדקודיות שוות זו לזו.

משימות

136 משימת יישום מידית של קטע השיעור. מומלץ לבצע את המשימה בעל-פה.

137 מומלץ לבצע את המשימה בעל-פה. החשוב לנמק
- כי זו ההגדרה/התכונה של זוויות קדקודיות;
- כי הזוויות צמודות לאותה זווית.

138 משימה דומה למשימה הקודמת, ומודגש הקשר בין המידות של זוויות קדקודיות ושל זוויות צמודות. התלמידים יכולים לחשב את מידות הזוויות בעזרת זיהוי של זוויות צמודות ושל זוויות קדקודיות.

139 משימה דומה למשימה הקודמת. הפעם הזוויות בין קטעים.

140 מומלץ לבצע את המשימה בעל-פה. הזוויות הן בין קטעים כדי למנוע "בלבול" בין שמות של ישרים ושמות של קרניים.

141 בכיתות חלשות אפשר להסתמך על סרטוט ובכיתות מתקדמות אפשר לבקש נימוק פורמלי יותר.

א הישרים מאונכים זה לזה. (מידת כל זווית בזוג של זוויות קדקודיות היא $90°$, גם הזווית הצמודה לה היא זווית ישרה).

ב סכום ארבע הזוויות שנוצרו בחיתוך הוא $360°$. סכום שלוש זוויות מתוך ארבע זוויות אלה הוא $270°$, לכן מידת הזווית הרביעית **A** היא $90°$. לפיכך מידתה של כל זווית היא $90°$. (הזווית **A** היא אחת משתי זוויות קדקודיות. מידת הזווית השנייה, השווה ל- **A**, היא $90°$. הזווית **A** היא אחת משתי זוויות צמודות. מידת הזווית השנייה, המשלימה את **A** ל- $180°$, היא $90°$).

142 נדרש נימוק המבוסס על תכונות גאומטריות. דוגמה: שני ישרים נחתכים יוצרים זוויות צמודות וזוויות קדקודיות. כל אחת מארבע הזוויות שייכת לזוג של זוויות צמודות. סכום זוויות צמודות הוא זווית שטוחה, לכן כל זווית קטנה מסכומן.

143 הזוויות הן זוויות קדקודיות. שני ישרים נחתכים יוצרים זוויות צמודות וזוויות קדקודיות. הסכום של זוויות צמודות הוא $180°$. לכן מדובר בזוויות קדקודיות.

144 תלמידים כבר מכירים סרטוט זה. הפעם יש ברשותם אוצר המילים הנדרש כדי להצדיק את קביעתם בלי מדידות.

$\alpha = \beta = ∢5 = ∢2$

$∢1 = ∢3 = ∢4 = ∢6 = 180° - \alpha$

145 **א** $\alpha = \gamma = 130°$ $\beta = 50°$

ב $\alpha = \gamma = 65°$ $\beta = 115°$

ג $\alpha = \gamma = 178°$ $\beta = 2°$

146 סיכום הנלמד. מומלץ לבצע את המשימה בעל-פה ולבקש נימוקים.

א נכון. **ב** לא נכון. **ג** נכון. **ד** לא נכון. **ה** נכון. **ו** לא נכון.

ד.3. זוויות מתאימות, זוויות מתחלפות

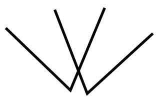
סוגיה זו היא האחרונה בבדיקת הקשרים בין ישרים וזוויות. היא מובילה לתכונות של זוויות הנוצרות בחיתוך ישרים מקבילים וישר החותך אותם.

מגלים (עמ' 316)

1 בסרטוט השמאלי מופיעים קווים (קטעים) מקבילים, ובאותו סרטוט מופיעות זוויות שוות.

2 גם כאן ישנם קווים מקבילים וזוויות שוות.

3 אין קווים מקבילים, ואין זוויות שוות. דוגמה:



הפעילויות מובילות להבנה של שוויון הזוויות המתאימות בין ישרים מקבילים, זאת עדיין ללא הגדרה פורמלית של המושגים.

לומדים (עמ' 316)

בשיעור לומדים מהן זוויות מתאימות ומהן זוויות מתחלפות. כאן מדובר בחיתוך של שני ישרים כלשהם (לאו דווקא ישרים מקבילים). המושגים "זוויות מקבילות" ו"זוויות מתחלפות" הם מושגים "מבלבלים", ולכן יש להרבות בתרגול של זיהוי זוויות מכל סוג. יש לפתח ראייה מתאימה, והתרגול יכול לסייע בכך. בכל פעם רצוי לשאול שאלות מתאימות, למשל: מה הם הישרים ומיהו החותך? האם הזוויות נמצאות מאותו צד של החותך? האם הזוויות נמצאות באותו צד ביחס לישרים? חשוב גם לגוון בסוגי הזוויות המתאימות – פעם מימין לחותך, פעם משמאלו; פעם מעל הישרים, פעם מתחתיהם. רק בסוף השיעור מדברים על ישרים מקבילים, ומציינים שכאשר הישרים מקבילים, הזוויות המתאימות שוות, והזוויות המתחלפות שוות.

יש למנוע תפיסות שגויות

- שזוויות מתאימות ומתחלפות קיימות רק בין ישרים מקבילים;
- שזוויות מתחלפות ומתאימות תמיד שוות.

שוויון של זוויות מתחלפות ושל זוויות מתאימות במקרה של ישרים מקבילים הוא אחד מהביטויים של אקסיומת אוקלידס, שהיא הבסיס של הגאומטריה האוקלידית.

משימות

147

זוויות מתאימות	זוויות מתחלפות
$(\sphericalangle 1, \sphericalangle 5)$, $(\sphericalangle 4, \sphericalangle 8)$, $(\sphericalangle 2, \sphericalangle 6)$, $(\sphericalangle 3, \sphericalangle 7)$	$(\sphericalangle 1, \sphericalangle 7)$, $(\sphericalangle 4, \sphericalangle 6)$, $(\sphericalangle 2, \sphericalangle 8)$, $(\sphericalangle 3, \sphericalangle 5)$

148 זיהוי זוויות הנוצרות על-ידי ישרים וחותך.

זוויות קדקודיות	זוויות צמודות	זוויות מתאימות	זוויות מתחלפות
ב–ח	ב–ה–ו–ז	א–ג	ד–ו–ז

149 לא. אחד הקשיים של התלמידים הוא שילוב של תכונות או של מאפיינים. במקרה זה הזוויות ישרות ומתאימות. אפשר לנמק את התשובה על-ידי סרטוט.

150 יש להשתמש בתהליך הסקה (לכן).

א מתחלפות. **ב** צמודות. **ג** צמודות.

ד $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 8$ לכן $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 4$ כזוויות קדקודיות לזוויות שוות.

ה מתחלפות.

ו התלמידים יכולים להשתמש בשוויונות $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 4$ לכן $\sphericalangle 6 = \sphericalangle 2$ כזוויות צמודות לזוויות שוות.

ז מתאימות.

ח התלמידים יכולים להשתמש בשוויונות $\sphericalangle 6 = \sphericalangle 2$ לכן $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 7$ כזוויות קדקודיות לזוויות שוות

ח מתאימות.

151 שיעורי בית. בדיקה של שוויון הזוויות בין ישרים מקבילים וחותך.

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4 = \sphericalangle 5 = \sphericalangle 8$ $\qquad$ $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = \sphericalangle 6 = \sphericalangle 7$

152 שוויון זוויות שנוצרו על-ידי ישרים מקבילים וחותך.

א זוויות שוות ל- $\sphericalangle 1$: $\sphericalangle 8$, $\sphericalangle 5$, $\sphericalangle 4$

ב זוויות שוות ל- $\sphericalangle 2$: $\sphericalangle 7$, $\sphericalangle 6$, $\sphericalangle 3$

ג סעיפים 1 – 3 – 4.

153 זיהוי זוויות מתחלפות כאשר החותך הוא קטע. מצב זה נפוץ מאוד בהוכחות בגאומטריה.

1 ו- 3, 2 ו- 4.

154 על התלמידים להסתכל על חלק מסרטוט. $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = 30°$ כי הן זוויות מתחלפות.

YA ו- **EF** הם ישרים מקבילים. **YF** חותך.

ב $\sphericalangle 3 = 60°$, כי $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 90°$.

155 יישום השאלה הקודמת באלגברה. $\sphericalangle 2 = 90° - x$, כי $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 1 = 90°$.

ב $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ כי הזוויות מתחלפות בין הישרים המקבילים **SP** ו- **OT** והחותך **SO**.

156 הצלעות **BC** ו- **AD** חותכות את המקבילים **AB** ו- **MP** ויוצרות זוויות מתחלפות שוות לזווית ישרה.

157 שאלת אתגר לשיעורי בית. הסתכלות בחלק מסרטוט.

ישרים מקבילים	חותך	זוויות מתחלפות	
PO ו- **IL**	**OI**	1-5	2-6
PO ו- **IL**	**PL**	3-7	4-8
OL ו- **PI**	**OI**	2-6	1-5
OL ו- **PI**	**PL**	3-7	4-8

158 תלמידים יכולים להיעזר בתשובות למשימה 152.

$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 5 = \sphericalangle 8 = 130^0$ $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = \sphericalangle 6 = \sphericalangle 7 = 50^0$

159 ג $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4 = 50^0$ $\sphericalangle 3 = 130^0$

160 הזוויות הנתונות הן זוויות מתחלפות, אך הן אינן שוות, לכן הישרים אינם מקבילים.

161 אם הישרים מקבילים, סכום הזוויות הנתונות צריך להיות 180^0, כי מידה של אחת מהזוויות שווה למידת הזווית הצמודה לזווית האחרת. הישרים אינם מקבילים.

משימות 162– 168 הן ההוכחות הראשונות בגאומטריה, לכן רובן מסומנות כאתגר.
התלמידים מתקשים לנתח את הסרטוט ולראות מה הם המקבילים, ובעיקר מהו החותך. מומלץ לבקש מהתלמידים לרשום בכל שלב את שמות המקבילים והחותך וכן את סוג הזוויות ולסמן את הנתונים ואת הזווית המבוקשת.

162 **AB** ו- **CD** מקבילים, **BD** חותך: סכום הזוויות **ABD** ו- **BCD** הוא 180^0.
לכן $\sphericalangle \mathbf{ABD} = 130^0$ ו- $\sphericalangle \mathbf{ABC} = 65^0$, כי **CB** חוצה את הזווית **ABC**.

163 **BO** ו- **RA** מקבילים, **NR** חותך, לכן $\sphericalangle$**RNO** והזווית המבוקשת $\sphericalangle$**ARN** שוות, כי הן זוויות מתחלפות.

$\sphericalangle \mathbf{RNO} = \sphericalangle \mathbf{ANR}$ (**NR** חוצה זווית של הזווית **ANO**), $\sphericalangle$**ANO** ו- $\sphericalangle$**RNB** הן זוויות צמודות,
לכן $\sphericalangle \mathbf{ANO} = 132^0$ ו- $\sphericalangle \mathbf{ANR} = 66^0$.

164 התלמידים צריכים לעבור שלב נוסף: עליהם לגלות מהם המקבילים לפי הנתונים.
המקבילים **PR** ו- **ST** (מאונכים לאותו ישר), החותך: **SP**. הזווית המבוקשת והזווית **SPR** מתחלפות,
לכן הן שוות $\sphericalangle \mathbf{PST} = 65^0$.

165 תלמידים יכולים לסרטט מקבילים וחותך כלשהו. אפשר לדמיין מצב שכל הזוויות שוות, ולהגיע למסקנה שכל הזוויות ישרות.

166 בשאלה הראשונה שני ישרים חותכים מגדירים קטעים על מקבילים, לכן קשה יותר לראות את הזוויות.
MO ו- **IT** מקבילים, **SO** חותך, לכן הזוויות $\sphericalangle$**MOT** ו – $\sphericalangle$**STI** שוות, כי הן זוויות מתאימות.

167 יש לרשום בסרטוט את הנתונים ואת המסקנות המידיות הנובעות מהנתונים.
מומלץ לציין לתלמידים שהשאלה עוסקת רק בזוויות, ולכן אין צורך לרשום שוויון קטעים.

א $\sphericalangle EBN = \sphericalangle OBN$

ב הזווית המבוקשת **OBN** היא חצי מהזווית **EBO**. **BO** ו- **ES** מקבילים, **EB** חותך.
הזווית $\sphericalangle$**SEB** ו- $\sphericalangle$**EBO** שוות כי הן זוויות מתחלפות. לכן $\sphericalangle EBO = 48^0$ ו- $\sphericalangle OBN = 24^0$.

168 הכללה של תכונה שהתלמידים כבר גילו במשימה 158: סכום הזוויות x ו- y הוא 180^0.

169 שילוב אלגברה וגאומטריה. המשוואה היא: $3 \cdot x - 240 + x = 180$, לכן $x = 105°$.

170 שילוב אלגברה וגאומטריה. המשוואה היא : $8 \cdot x + 60 + 2 \cdot x + 20 = 180$, לכן $x = 100°$.

פיצוחים

171 שילוב גאומטריה ואלגברה. התלמידים עדיין לא למדו לפתור סוג זה של משוואות.
אם $2 \cdot x = x + 50$, אפשר "לנחש" ש- $x = 50$.

172 $x = 45°$.

מיומנויות עמ' 323

מדידת זווית נתונה בעזרת מד–זווית ובניית זווית שמידתה נתונה. חלק מהתלמידים פיתחו את המיומנויות האלה בבית הספר היסודי.

מוכנים להמשיך? עמ' 324

1. ד, א, ג **2.** ב, ג, ד, ח, ט **3.** ה **4.** ב **5.** ג **6.** ב **7.** כולן חוץ מ- ב.

תרגילים נוספים עמ' 326

בחלק מהתרגילים הנוספים חוזרים על המשימות שבפרק, וחלקם מיועדים לתלמידים חזקים (סימון "אתגר" בספר).

תשובות לשאלות נבחרות

173 סביר להניח כי התלמידים יציירו שני ישרים לשתי הזוויות השטוחות, כלומר לזוויות אין שוק משותפת. אפשר לסרטט ישר אחד ונקודה עליו, ויתקבלו שתי זוויות שטוחות. ייתכן שתלמידים יתקשו לראות בסרטוט זה שתי זוויות שטוחות. בסרטוט להלן שתי הזוויות השטוחות מסומנות בקשתות. אם מסמנים את הזוויות האלה באותיות, יהיו להן שמות זהים.

174 כתיבה שיטתית של הקרניים.
דוגמה לשיטה: לכתוב את כל הקרניים היוצאות מקדקוד.
הקרניים הן: **KI**, **KR**, **KA**, **IK**, **IR**, **IA**, **RK**, **RI**, **RA**, **AK**, **AI**, **AR**.

175 משימה הדומה למשימה 159, אך הפעם יש שני ישרים החותכים זוג של מקבילים. על התלמידים לעבוד בשיטתיות.

א זוויות שווה ל- $\measuredangle$**SBV**: $\measuredangle$**UCB**, $\measuredangle$**KCD**, $\measuredangle$**CBA**, $\measuredangle$**BAT**, $\measuredangle$**DAE**, $\measuredangle$**CDA**, $\measuredangle$**ZDA**.

ב זוויות שווה ל- $\measuredangle$**BAD**: $\measuredangle$**EAT**, $\measuredangle$**ABV**, $\measuredangle$**SBC**, $\measuredangle$**KCU**, $\measuredangle$**DCB**, $\measuredangle$**ZDC**, $\measuredangle$**ADH**.

176 סביר להניח שהתלמידים יסרטטו סרטוט היוצר משולש. האפשרות הנוספת היא שלשלושת הישרים נקודה משותפת.

177 תלמידים יכולים להראות את המיומנות על הלוח.

178 פיתוח מיומנות מדידה.

179 פיתוח מיומנות קיפול. הציעו לתלמידים לסרטט זווית "גדולה".

180 **א** דוגמאות: בשעה 3^{00} ובשעה 9^{00}. **ב** בשעה 1^{00} ובשעה 2^{00}.

ג בשעה 8^{15}. **ד** הן שוות.

181 $\measuredangle$**COB**, $\measuredangle$**COD**, $\measuredangle$**COA**, $\measuredangle$**BOD**, $\measuredangle$**BOA**, $\measuredangle$**DOA**.
אפשר גם להתייחס לזוויות גדולות מזווית שטוחה.

182 זיהוי זוויות בסביבה, כלומר בהקשר תלת ממדי.

183 **א** כתיבת וקריאת זוויות. **ב** לא.

184 בניית חוצה-זווית של זווית ישרה בעזרת קיפול.

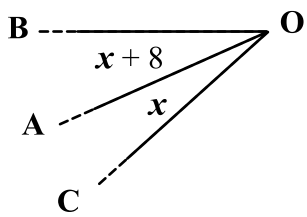
185 קריאת זוויות וזיהוי סכום של זוויות.

א דוגמה: $\sphericalangle \mathbf{AOT} = \sphericalangle \mathbf{AOV} + \sphericalangle \mathbf{VOT}$, $\sphericalangle \mathbf{IOT} + \sphericalangle \mathbf{VOI} + \sphericalangle \mathbf{AOV} = \sphericalangle \mathbf{AOT}$.

ב דוגמה: $\sphericalangle \mathbf{AOI} - \sphericalangle \mathbf{IOV} + \sphericalangle \mathbf{AOV}$.

186 **א** $180°$ **ב** $156°$ **ג** $156°$ **ד** $102°$

187 שילוב אלגברה וגאומטריה. המשוואה היא $2 \cdot x + 8 = 88$.
לפיכך מידות הזוויות הן $40°$ ו- $48°$.



188 בדיקת ההבנה של הגדרת חוצה-זווית בכיתות חלשות. (לכן לא צוין שהזוויות הנוצרות הן שוות.)

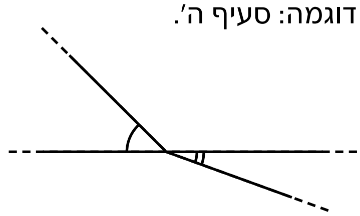
189 פיתוח מיומנות קיפול.

190 מידת הזווית **A** היא $360°$.

191 בדיקת ההבנה של הגדרת זוויות צמודות.

192 לזווית נתונה יש שתי זוויות צמודות.

193 סעיפים ב', ג', ז', י' ו- י"ב נכונים.
בסעיפים האחרים מומלץ לבקש מהתלמידים שיראו דוגמה נגדית.
דוגמה: סעיף ה'.



194 לא. הזוויות **AOB** ו- **BAO** זהות, או שסכומן הוא $360°$.

195 הזוויות שוות, כי הן שוות לאותה זווית **BCD**.

196 $\sphericalangle \boldsymbol{e} = 180 - \boldsymbol{a} = \sphericalangle \boldsymbol{b}$ $\sphericalangle \boldsymbol{c} = \sphericalangle \boldsymbol{a} = \sphericalangle \boldsymbol{d}$

197 הזוויות **ANC** ו- **NCI** שוות. $\sphericalangle \mathbf{ANC} = 90 - 65 = 25$ לכן $\sphericalangle \mathbf{NCI} = 25°$.

198 לשיעורי בית. קיימות זוויות בחלק הירוק ובחלק הלבן של הציור.

ממשיכים בתרגול עמ' 281

199 30 זוויות.

200 שילוב גאומטריה ותחום המספרים: 100^0.

201 אפשרות לכתיבת דרך הפתרון: $\sphericalangle ABC$ ו- $\sphericalangle ABD$ הן זוויות צמודות. לפיכך $\sphericalangle ABD + \sphericalangle ABD = 180°$.
אם נסמן את מידת הזווית **ABD** ב– α, מתקבלת משוואה.

א $\alpha + 4 \cdot \alpha = 180°$;   **ב** $\alpha + (\alpha + 60°) = 180°$.

פותרים כל משוואה בדרכים שנלמדו בשיעורי אלגברה.

202 שילוב גאומטריה ואלגברה.

א אם מסמנים ב- x את מידת הזווית הקטנה, מידת הזווית הגדולה תהיה $(x + 50)°$. סכומן הוא $180°$.
מידות הזוויות הן $75°$ ו- $125°$.

ב אם מסמנים ב- x את מידת הזווית הקטנה, מידת הזווית הגדולה תהיה $2 \cdot x°$. סכומן הוא $180°$.
מידות הזוויות הן $60°$ ו–$120°$.

ג מידות הזוויות $30°$ ו– $150°$.

203 בכל הסעיפים הזוויות שוות. תלמידים ילמדו מאוחר יותר את תכונות הזוויות במעגל.

204 חיזוק תכונה של זוויות במעגל על-ידי עשייה. אחת הדרכים להראות שהתכונה קיימת היא ביצוע מקרים רבים ושונים (אין קשר בין המעגלים של התלמידים והנקודות נבחרות באקראי).

205 דוגמאות: $\sphericalangle ONR = \frac{\sphericalangle ONI}{2}$; $\sphericalangle ONA = \sphericalangle ONR + \sphericalangle RNA$; $\sphericalangle ONA = \sphericalangle ONI + \sphericalangle INA$;
$\sphericalangle RIN = \sphericalangle RNA + \sphericalangle INA$.

206 מקרה פרטי של תכונה שתלמידים כבר נחשפו אליה: חוצי-הזווית של זוויות צמודות מאונכים זה לזה.

207 הכללה של משימות 147 ו- 148. (x ו- $(180 - x)$).

208 שיעורי בית. סעיף ב': זוויות מתאימות ומתחלפות קיימות גם בישרים לא-מקבילים.

זוויות מתאימות	זוויות מתחלפות
$(\sphericalangle 8,\sphericalangle 4)$, $(\sphericalangle 5,\sphericalangle 1)$, $(\sphericalangle 6,\sphericalangle 2)$, $(\sphericalangle 3,\sphericalangle 7)$, $(\sphericalangle 8,\sphericalangle 11)$, $(\sphericalangle 5,\sphericalangle 12)$, $(\sphericalangle 6,\sphericalangle 9)$, $(\sphericalangle 10,\sphericalangle 7)$, $(\sphericalangle 4,\sphericalangle 10)$, $(\sphericalangle 2,\sphericalangle 12)$, $(\sphericalangle 3,\sphericalangle 9)$, $(\sphericalangle 11,\sphericalangle 1)$	$(\sphericalangle 7,\sphericalangle 12)$, $(\sphericalangle 8,\sphericalangle 9)$, $(\sphericalangle 5,\sphericalangle 10)$, $(\sphericalangle 6,\sphericalangle 11)$, $(\sphericalangle 4,\sphericalangle 11)$, $(\sphericalangle 3,\sphericalangle 12)$, $(\sphericalangle 2,\sphericalangle 10)$, $(\sphericalangle 9,\sphericalangle 1)$

209 תלמידים צריכים לסרטט 12 שנתות כשמידת הזווית ביניהן היא $30°$.

העמקה עמ' 335

הנימוק: שוויון זוויות מתחלפות ושוויון זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים וחותך.