5. משוואות ושאלות מילוליות

רקע

שני הנושאים המרכזיים של הפרק הם חשיפה ראשונה למושג **משוואות** ופתרון **בעיות מילוליות.**
פתרון משוואות הוא נושא מרכזי באלגברה. משוואה היא שוויון, לכן הבנת תכונות השוויון באופן אינטואיטיבי מאפשרת לתת משמעות ל"מניפולציות" שהתלמידים מתבקשים לבצע כדי לפתור משוואה. כדי לפתור משוואה יש לשמור על השוויון בין שני האגפים שמצדי הסימן "שווה". לשם כך משתמשים בתכונות השוויון, בעיקר בתכונת ההצבה: אם שני ביטויים שווים, אפשר להחליף זה בזה.
<u>הערה</u>: למעשה, התלמידים כבר פתרו משוואות בפרקים קודמים, אך לא בדרך פורמלית ולא השתמשו באוצר המילים הייחודי למשוואות, אלא בתרגילים מהסוג "לאיזה ערך של הנעלם מתקיים השוויון...?".

עקרון המאזניים הסימטריים הוא פשוט מאוד: בשעה שהמאזניים מאוזנים מתקיים שוויון. לכן השימוש במאזניים הוא אמצעי הסבר טוב. אבל אחת הבעיות בייצוג זה היא שמאזניים אלה כמעט חלפו מן העולם. ייצוג דומה למאזניים הוא הנדנדה. אמנם היא ילדותית, אבל היא דמות מנטלית הקשורה לנושא אחר במתמטיקה: היחס ההפוך בין המשקל שעל מושב הנדנדה ואורך המוט שבין מהמושב לבין הציר.

בראשית פרק זה נדון באוצר המילים הקשור למשוואות: "משוואה", "נעלם", "פתרון". לאחר מכן התלמידים ילמדו את המושג "זהות". יש להסביר היטב את התפקידים השונים של האות במשוואות ובזהויות: במשוואות מחפשים את ערך המשתנה; ואילו בזהות אין מה לחפש כי זהות מתקיימת עבור כל הערכים האפשריים של המשתנה. לבסוף נציע שיטה מסודרת לפתרון משוואות על-ידי המושג "משוואות שקולות".

החלק השני של הפרק מוקדש לשאלות מילוליות. התלמידים כבר פתרו שאלות מילוליות במתמטיקה בכיתות קודמות, אך הפעם נעודד אותם לתרגם את הנתונים ולפתור את הבעיות המוצעות דווקא על-ידי משוואות. במקביל נדון בעניין הערכים האפשריים של נעלם בשאלות מילוליות. דיון זה חשוב, משום שהתלמידים נדרשים לחשוב על המשמעות של החישובים שלהם ולבדוק את תשובותיהם. מומלץ להקדיש לפרק כ- 6 שעות.

קשיים צפויים בהוראת הפרק

נוסף על הקושי הנובע מתפיסה שגויה של הסימן "שווה", הקושי העיקרי בפרק נובע מאופיו. הפרק מבוסס על אינטואיציית התלמידים, והם אינם מבינים מדוע עליהם לנמק את תשובותיהם ואינם יודעים איך לעשות זאת.
קושי נוסף נוגע לפתרון משוואות פשוטות שהם מתבקשים לפתור בדרך אינטואיטיבית. משוואות אלו דומות לאלו שהתלמידים פתרו בבית-הספר היסודי. ההבדל הוא שבחטיבה משתמשים ב**אות** במקום ריבוע או קו תחתון או מקום ריק. במצב זה התלמידים אינם מבינים "מה צריך לעשות".
התלמידים לומדים להכיר תהליך אלגוריתמי לפתרון בעיות מילוליות. הקושי הראשון הוא בחירת הנעלם (לא תמיד המבוקש הוא הנעלם שנבחר). בפרק זה המבוקש עדיין מסומן ב**אות**, והוא הנעלם. הקושי העיקרי הוא בניית משוואה המתאימה לנתונים. לפיכך יש להדריך את התלמידים לנתח את הנתונים כראוי: **לקרוא** את הבעיה המילולית, **לבחור** מה מייצג את הנעלם, ו**לבחור** את הפעולות המתאימות המקשרות בין הנתונים.
מיומנות פתרון המשוואות נרכשת דרך התרגול. דרישה לנימוק תהליך הבחירה מחזקת את החשיבה המתמטית.

מבנה הפרק

מדור א. משוואות וזהויות

מדור ב. ממילים לאלגברה

מושגים ומונחים

שוויון, אגפי השוויון, משוואה, נעלם, פתרון משוואה, משוואות שקולות, חוקי פעולות, תכונות השוויון, פישוט משוואה, זהות.

מטרות

התלמידים ידעו:

א להבחין בין שוויון לבין משוואה או זהות;
ב להשתמש במונחים הרלוונטיים – משוואה, נעלם, פתרון, אגף, משוואות שקולות – לפי הצורך;
ג למצוא פתרון למשוואה על-ידי חוקי פעולות ותכונות השוויון;
ד לפתור משוואות פשוטות באופן אינטואיטיבי;
ה לבנות זהויות בעזרת חוקי הפעולות;
ו לנתח שאלות מילוליות שיש בהן רק מספרים חיוביים;
ז לכתוב משוואה מתאימה לשאלה מילולית ולפתור אותה.

ציוד

מאזניים ומשקולות, חפצים שונים וזהים, כגון: כדורים, קוביות, וכדומה.

השיעור בספר הלימוד

מגלים ולומדים עמ' 253

א. משוואות וזהויות

א.1. משוואות

מגלים (עמ' 253)

מיון השוויונות מביא את התלמידים להבחנה בין שוויון מספרי שתמיד מתקיים או תמיד לא-מתקיים, לבין שוויון שיש בו משתנים ואי-אפשר לדעת אם הוא מתקיים או לא. גם חלק מהשוויונות עם המשתנים יכולים להתקיים תמיד, שוויונות אלה נקראים "זהויות" ונדון בהם לחוד בשיעור הבא.

יהיו תלמידים שיגלו על-ידי ניחוש ביטויים שבהם אי-אפשר לדעת מה להציב בשוויון במקום המשתנה כדי שהשוויון יתקיים.

לומדים (עמ' 253)

מגדירים את המושג "משוואה" כשוויון שמופיעים בו משתנה או משתנים. המספר הלא-ידוע נקרא "נעלם". המספר שמוצב במקום הנעלם המביא לשוויון שמתקיים, הוא **פתרון המשוואה**. כל תכונות השוויון מתקיימות במשוואה. רצוי לציין בקצרה כי אפשר למצוא בדרכים שונות את הפתרון שבהצבתו במשוואה יתקבל שוויון שמתקיים. דרכים אלו יילמדו בהמשך הפרק.

הערה: אין לדרוש מהתלמידים את ההבחנה בין "נעלם" ל"משתנה". ההסברים בספר הם רק לשם הבנה טובה יותר של תפקידי האות.

משימות

1 אין צורך לפתור את המשוואה. מטרתה לבדוק אם התלמידים הבינו את המושג "פתרון משוואה", כלומר האם השוויון מתקיים בהצבת מספר מסוים במקום הנעלם.

א המספר הוא 14, כי $14 + 7 = 21$.

ב המספר הוא 17, כי $17 - 5 = 12$.

ג המספר הוא 18, כי $3 \cdot 18 + 2 = 56$.

2 המטרה היא לבדוק אם התלמידים הבינו מה זו משוואה, ולחזק את העובדה שהנעלם יכול להיות כל אות. בכל הסעיפים מתקבלות משוואות.

התשובות: **א** 34 **ב** 20 **ג** 132 **ד** 2 **ה** 165.

(התלמידים לא התבקשו לפתור את המשוואות.)

במשימות 3 – 7 התלמידים מתבקשים לפתור משוואות באופן אינטואיטיבי.

3 א 1 ב 2 ג 3 ד 4

4 א 13 ב 12 ג 11 ד 10

5 א 5 ב 7 ג 18 ד 26

6 א 17 ב 21 ג 8 ד 11 ה 1 ו 21

7 א 5 ב 7 ג 18 ד 26

8 חזרה על שימוש בתכונות השוויון. התלמידים מתבקשים להצדיק אותן על-ידי תכונות השוויון. התרגיל יעזור לתלמידים להשתמש במשימות 9– 10 בפעולות כפל וחילוק בצורה נכונה, ולא בפעולות חיבור וחיסור כפי שעשו במשימות הקודמות.

9 א 8 ב 16 ג 60 ד 15 ה 35 ו 12 ז 14 ח 12

10 בכל הזוגות כופלים או מחלקים את הנעלם באותו מספר.

א $\boldsymbol{x} = 3$, $\boldsymbol{x} = 27$ ב $\boldsymbol{x} = 4$, $\boldsymbol{x} = 16$ ג $\boldsymbol{x} = 2$, $\boldsymbol{x} = 50$ ד $\boldsymbol{x} = 3$, $\boldsymbol{x} = 147$

11 תלמידים שיגיעו למסקנה שבכל הצבה במשוואות אלו מתקבל שוויון שמתקיים, יגיעו להגדרת ה**זהות**. תלמידים שיגלו שבגלל תכונות חוקי החשבון המשוואות תמיד מתקיימות, הם ברמה גבוהה יותר.

12 תרגיל זה והתרגיל הבא אינם רק יישומים פשוטים של השיעור בתחום הגאומטרי, אלא גם מעודדים את התלמידים לתרגם נתונים על-ידי משוואה. התלמידים ישתמשו רבות במיומנות זאת במדור ב', המוקדש לשאלות מילוליות. תשובה: $\alpha = 130°$.

13 דוגמה: $\boldsymbol{x} - 7 = 9.5$, $\boldsymbol{x} - 9.5 = 7$, $\boldsymbol{x} = 9.5 + 7$.

א.2. זהויות

<u>לומדים (עמ' 255)</u>

במשוואות מיוחדות, שהן זהויות, בהצבת **כל** מספר במקום הנעלם מתקבל שוויון שמתקיים. יש לשים לב (דגש זה מופיע בתרגילים), כי בדיקה אחת אינה מספיקה לזיהוי זהות.

דגש מיוחד יש לתת לכך שאת הזהויות אפשר לגלות בעזרת חוקי הפעולות. כל חוקי הפעולות מתבטאים על-ידי זהויות. בתרגול יזהו התלמידים זהויות וגם יבינו זהויות בעזרת חוקי הפעולות.

<u>הערה</u>: המונח **זהות** אינו מופיע במפורש בתכנית הלימודים החדשה, אך לדעת כותבי הספר, ההבחנה בין **משוואה** לבין **זהות** עוזרת לתלמידים להבין את המהות של המשוואה.

משימות

במשימות 14 – 16 התלמידים מתבקשים לזהות זהויות. אפשר לבקש מהתלמידים לציין לפי אלו תכונות הזהויות מתקיימות.

14 זהויות: א, ג, ד, ה, ח.

15 א, ה, ו.

16 ב, ה, ו.

17 **א** חילוף; **ב** קיבוץ; **ג** פילוג.

18 **א** כן; **ב** כן; **ג** לא. אפשר להסביר את התשובה על-ידי הצבת 0 או 1 במקום $\boldsymbol{x}$.

19 **א** $\frac{10}{\boldsymbol{x}}$ **ב** $\frac{5}{\boldsymbol{x}}$ **ג** $\frac{6}{\boldsymbol{y}}$ **ד** $\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{x}}$
ה $\frac{3}{2\cdot \boldsymbol{a}}$ **ו** $\frac{1}{2\cdot \boldsymbol{a}}$ **ז** $\frac{11\cdot \boldsymbol{c}}{5}$ **ח** $\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}$

20 משתמשים בזהויות אלה כאשר מחברים או מחסרים שני שברים, והמכנה של אחד השברים הוא כפולה של המכנה של השבר האחר. דוגמה: $\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$.

א.3. פתרון משוואות

מגלים (עמ' 256)

התלמידים חוזרים על כך שהסרת אותו גודל משתי כפות המאזניים או הוספת אותו גודל לשתי כפות המאזניים אינן משנות את האיזון. כאן יש מעבר ליישום ידע זה בפתרון משוואות. התלמידים מגלים שאם מוסיפים אותו מספר לשני האגפים במשוואה (או מחסרים אותו מספר משני האגפים), מקבלים משוואה שקולה; ואם מוסיפים אותו ביטוי לשני האגפים במשוואה (או מחסרים מהם אותו ביטוי), האיזון נשמר. למעשה, התלמידים עוברים בדרך של גילוי ממשוואה אחת למשוואה פשוטה יותר על-ידי הוספה או החסרה של ביטוי או של מספר משני האגפים.

לומדים (עמ' 257)

פתרון משוואה הוא מספר שבהצבתו במקום המשתנה מתקבל שוויון שמתקיים.
כדי לפתור משוואה עוברים מהמשוואה הנתונה למשוואה פשוטה יותר על-ידי תכונות השוויון וחוקי פעולות, כגון הוספת מספר לשני אגפי המשוואה, הפחתת מספר משני אגפי המשוואה, שימוש בחוק הפילוג ובחוק הקיבוץ. התלמידים כבר למדו כי פעולות אלו מביאות לביטויים אלגבריים שווים ולפישוט ביטויים אלגבריים.
כאן הם לומדים כי משוואות שקולות הן בעלות אותו משתנה, וכל פתרון של המשוואה האחת הוא פתרון של המשוואה האחרת, שמגיעים אליה על-ידי תכונות השוויון וחוקי פעולות. כדי לפתור משוואה מגיעים למשוואה שהנעלם בה **מבודד**. הבדיקה חשובה כדי להראות שערך הנעלם שמוצאים לאחר הבידוד, הוא הפתרון, כי מתקבל שוויון במשוואה המקורית.
בשלב זה עדיף לבקש מהתלמידים לכתוב את כל השלבים של פתירת משוואה, כדי לגלות את הטעויות.

<u>הערה</u>: אין להשתמש בביטוי "עוברים מאגף לאגף ומשנים סימן"! ביטוי זה הוא מקור לאין-ספור טעויות. התלמידים לא תמיד "משנים סימן" בצורה נכונה.

משימות

משימות 21– 24: המחשת המושגים "משוואות שקולות" ו"פתרון משוואה" על-ידי ייצוגים, כגון מאזניים. שלב זה חשוב ביותר לתלמידים המתקשים.

21 המחשה של תכונות השוויון: להפחית 100 גרם מכל מגש; לחלק ב- 3 את הכמות בכל מגש.

22 4 ק"ג; 1 ק"ג; 1.5 ק"ג.

23 אפשר לפתור את השאלה על–ידי המשוואה: $x + 21 = 32$. המספר המבוקש הוא 11.

24 ד.

משימות 25– 30: פתרון משוואות פשוטות ושאלות לדיון בתהליך הפתרון ובשימוש נכון בתכונות השוויון ובפעולות המותרות.

25 א 5 ב 5 ג 1 ד 18 ה 3 ו 6

26 א חילוק של שני אגפי המשוואה ב- 2.
ב חיבור 2 לשני אגפי המשוואה.
ג כפל שני אגפי המשוואה ב- 2.

27 א 10 ב 6 ג 4 ד 7 ה 3 ו 8

28 א המשוואות אינן שקולות, כיוון שלא מבצעים אותה פעולה על שני האגפים. לאגף אחד מוסיפים 2 ומהאגף השני מחסרים 2.
ב המשוואות שקולות, כיוון שמבצעים אותה פעולה – מחסרים 2 משני האגפים.
ג המשוואות שקולות, הכפלנו ב- 8 את שני האגפים.
ד המשוואות אינן שקולות, כיוון שלא מכפילים באותו מספר את שני האגפים.
(אפשר גם לבדוק ולראות שהפתרון של משוואה (1) הוא 8 ושל משוואה (2) הוא 5).

29 א השנייה, כי צריך להוסיף למשתנה מספר קטן יותר כדי לקבל אותו סכום. $x = 80$, $x = 180$.
ב השנייה, כי מחסרים מהמשתנה מספר גדול יותר כדי לקבל אותו הפרש. $x = 95$, $x = 115$.

30 יש תלמידים שפותרים את המשוואות על-ידי "ניחוש" או "בראש" ואינם יודעים לפרש כיצד הגיעו לפתרון (בדרך כלל על-ידי שימוש לא מודע בפעולות הפוכות, כלומר עבודה על אגף אחד בלבד). לכן יש צורך בדיון.
א פעולה הפוכה: $x = 7 - 2$, לכן; $x = 5$.
ב פעולה הפוכה: $x = 3 - 1$, לכן; $x = 2$.
ג פעולה הפוכה: $x = 2 - 2$, לכן; $x = 0$.

ד פעולה הפוכה: $x = 3/2 - 1/2$, לכן ; $x = 1$.

ה פעולה הפוכה: $x = 6.5 - 2.5$, לכן ; $x = 4$.

ו חיסור 1 משני האגפים: $x + 1 - 1 = 3.4 - 1$, לכן ; $x = 2.4$.

ז חיסור 7.1 משני האגפים: $x + 7.1 - 7.1 = 7.1 - 7.1$, לכן ; $x = 0$.

ח חיסור 2.8 משני האגפים: $x + 2.8 - 2.8 = 5.6 - 2.8$, לכן ; $x = 2.8$.

משימות 31– 36: המשוואות המובאות כאן הן בדרך כלל מורכבות יותר בשל הצורך במספר שלבים או בשל שימוש בשברים. אפשר להציע אותן לתלמידים המתקדמים בלבד, בעיקר אם חסר זמן.

31 א $30 + 3 \cdot t = 69$, $t = 10$ ב $x = 5$ ג $c = 2$ ד $b = 10$ ה $y = 19$

32 א $\frac{1}{2}$ ב $2\frac{1}{3}$ ג $2\frac{1}{2}$ ד $9\frac{3}{7}$

33 א 8.5 ב 13.4 ג 9.5 ד 1

34 א 6.5 ב 5.75 ג 7.4 ד 5.5

35 א חוק הפילוג ב חוק הפילוג ג תכונות השוויון: הוספת אותו מספר לשני אגפי המשוואה

ד תכונות השוויון: הפחתת אותו מספר משני אגפי המשוואה ולאחר מכן חילוק שני אגפי המשוואה באותו מספר

ה תכונות השוויון: מכפלת שני אגפי המשוואה באותו מספר

ו תכונות השוויון: חילוק שני אגפי המשוואה באותו מספר.

36 על התלמידים למצוא את גורם ההרחבה על-ידי המונים או המכנים הנתונים, לחשב איזה מספר הוא האגף השני של המשוואה, ולפתור את המשוואה.

א 20 ב 9 ג 16 ד 3

37 א $b + 8 = 28$, $b = 20$ ב $4 \cdot a = 28$, $a = 7$

ג $c - 5 = 28$, $c = 33$ ד $d : 2 = 28$, $d = 56$

38 א לא-נכון ב נכון ג נכון ד לא-נכון

39

13	2	3	16
8	11	10	5
12	7	6	9
1	14	15	4

$10 + a$	$a - 1$	a	$a + 13$
$a + 5$	$a + 8$	$a + 7$	$a + 2$
$a + 9$	$a + 4$	$a + 3$	$a + 6$
$a - 2$	$a + 11$	$a + 12$	$a + 1$

הערה: כדי לקבל את הביטויים הנכונים בטבלה השנייה יש להוסיף $a - 3$ לביטויים שבטבלה הראשונה.

ב ממילים לאלגברה

ב.1. פתרון שאלות מילוליות

לומדים (עמ' 262)

חוזרים על תיאור של קשר בשאלה מילולית על-ידי משתנה. התלמידים כבר נתקלו בשאלות דומות בפרקים קודמים, לכן אין להתעכב אם התלמידים מגלים מיומנויות מספקות בנושא.

משימות

משימות 40– 48: שאלות של תרגום נתונים על-ידי משתנים. בחלק מהמשימות (41– 44) מופיעות שאלות הקשורות לקביעת ערכים אפשריים של משתנה נתון. רצוי לפתור עם התלמידים בכיתה לפחות דוגמה אחת של שאלה מסוג זה.

40 א המשתנה p מייצג את מספר האנשים שהיו בחדר בהתחלה. ב $p - 4$

ג בעיקרון, האילוץ היחיד הוא $p > 4$, אך יש מספר מוגבל של אנשים היכולים להיכנס בחדר (בהתאם לגודל החדר).

במשימות 41 – 44 אפשר לבקש מהתלמידים להסביר מדוע בחרו או פסלו תשובה מסוימת.

41 א המשתנה p יכול להיות 30, אבל לא 1,000 ולא 5. (5 לא מתאים מכיוון שירדו 8 אנשים).

ב $b - 2$

42 א המשתנה a יכול להיות 200, אבל לא מיליון ולא 40.5. ב $a + b$

ג באולם דוד: $8 - a$ משתתפים; באולם יונתן: $8 + b$ משתתפים.

43 א המחיר של 5 חבילות הוא 60 ₪. המחיר של c חבילות הוא $12 \cdot c$ ₪.

ב המשתנה a יכול להיות 4 או 1,000, אבל לא 4.5.

44 א המחיר של 5 חבילות הוא $5 \cdot m$ ₪. המחיר של c חבילות הוא $m \cdot c$ ₪.

ב המשתנה m יכול להיות 4 או 4.5, אבל לא 1,000.

45 $a - 3$

46 $b + 5$

47 $c + 10$

48 $d - 1$

בתרגילים 49 – 53 התלמידים מתבקשים לפתור משימות ארוכות או מורכבות יותר. בחלק מהן התלמידים פותרים שאלה מספרית בלבד ובהמשך חוזרים על אותה שאלה במשתנה.

49 א $213\frac{1}{3}$ ₪ ב $\frac{4 \cdot t}{3}$ ₪ ג $\frac{3 \cdot n}{4}$ ₪

50 א 5 ₪ ב $\frac{80}{a}$ ₪ ג $\frac{a}{b}$ ₪

51 א 25 מטר. ב $100 - b$ מטר.

52 א 270 מטר. יש תלמידים שיחשבו את התשובה "בראש", ויש שיעבדו בשלבים (חישוב הרוחב ולאחר מכן חישוב ההיקף).
ב $320 - 2 \cdot k$ מטר.

53 א 15, 22, 29 אוקטובר. ב 2, 9, 16, 23, 30 אוקטובר. ג יש הפרש של שבעה ימים ביניהם.
ד המשתנה a יכול להיות 15 או 1, אבל לא 35. ה $b + 7$ ו $c + 7$
ז אם הערך של b גדול מ- 21, התאריך של יום ראשון אחריו כבר לא יהיה בחודש אוקטובר.
אם הערך של c גדול מ- 21, התאריך של יום שני אחריו כבר לא יהיה בחודש אוקטובר.
ח $m + 2$ ו- $m - 5$ הם שבתות.

ב.2. התאמת ערכי המשתנים

מגלים (עמ' 264)

אחד מהקשיים בהוראה ובהבנה של המתמטיקה הוא שתלמידים חושבים שאין קשר בין פתרון משוואה לבין הגודל המיוצג על-ידי המשתנה. למשל, אם המשתנה מייצג גובה של בן אדם, יהיה הגיוני מבחינתם לקבל "4 מ'" כתשובה, 4 מטר; אבל אם המשתנה מייצג מספר אנשים התשובה לא יכולה להיות מבחינתם 7.5!
לכן חשוב לקבוע לפני כתיבת המשוואה, מה הם סוגי הערכים המתקבלים על הדעת כתשובה: מספרים טבעיים, סדר גודל, וכדומה.

לומדים (עמ' 265)

בחלק זה של השיעור דנים בערכים האפשריים שמשתנה יכול לקבל לפי הנתונים של שאלה מילולית. לעתים, ערכי המשתנה צריכים להיות מוגבלים למספרים שלמים בלבד; ולעתים הערכים צריכים להיות גדולים יותר (או קטנים יותר) ממספר מסוים. המטרה העיקרית היא לעורר את המודעות של התלמידים בעניין זה, ובאופן כללי לעודד אותם לבדוק את תשובותיהם כשהם עונים על שאלות מילוליות, כדי לוודא שהן מציאותיות ורלוונטיות בהקשר הנתון.

משימות

משימות 54 – 55: תרגילים של כתיבת ביטוי אלגברי המתאר מספר על–ידי ספרותיו. אף-על-פי שהתלמידים כתבו בעבר ביטויים כגון $52 = 5 \cdot 10 + 2$, ההכללה באמצעות ביטוי כגון $x = 10 \cdot a + b$ אינה פשוטה, ולכן רצוי להציג דוגמאות מספריות לפני ההכללה.

54 $10 \cdot a + 5$, $1 < a < 9$.

55 **א** במספר 230 $a = 0$, $b = 3$, $c = 2$;
במספר 999 $a = 9$, $b = 9$, $c = 9$;
במספר 808 $a = 8$, $b = 0$, $c = 8$;
במספר 774 $a = 4$, $b = 7$, $c = 7$;
במספר 584 $a = 4$, $b = 8$, $c = 5$.

ב $100 \cdot c + 10 \cdot b + a$

במשימות 56, 58 – 60 התלמידים מתבקשים לתאר כפולות של מספר מסוים, כגון מספרים זוגיים, או מספרים שאינם כפולות של מספר מסוים, כגון מספרים אי-זוגיים.

56 אפשר לכתוב ביטוי כגון $7 \cdot n$.

57 **א** 10 סמ"ר. **ב** 7 סמ"ר. **ג** $a \cdot b$ סמ"ר. **ד** $100 \cdot c \cdot d$ סמ"ר או $c \cdot d : 100$ מ"ר.

58 $2 \cdot n$

59 $2 \cdot n + 1$ או $2 \cdot n - 1$

60 אם המשתנה n מייצג את המספר שנבחר בהתחלה, המספר המתקבל בסוף הוא 3.

$$\frac{2 \cdot n + 6}{2} - n = \frac{2 \cdot n}{2} + \frac{6}{2} - n = n + 3 - n = 3$$

משימות 61 – 63: בתרגילים אלה יש לזכור שבשלב זה איננו משתמשים כלל במספרים שליליים. לכן ביטוי כגון $a + 3$ הוא בהכרח גדול מ- 3.

61 $a + 3$

62 $a + x$

63 $3 \cdot a - x$

משימות 64 – 66: העמקת הקשר בין ביטויים אלגבריים לתיאור היחס בין מספרים בתחום האריתמטיקה.

64
1 – ג, כל מספר מתאים.
2 – ד, המשתנה n צריך להיות מספר שלם.
3 – ד, המשתנה a צריך להיות מספר שלם.
4 – ה, המשתנה a צריך להיות מספר שלם.
5 – ב, המשתנה b צריך להיות מספר שלם.
6 – ח, המשתנה n צריך להיות מספר שלם.
7 – ו, המשתנה x צריך להיות מספר שלם.
8 – ז, המשתנה a צריך להיות מספר שלם.

65 **א** המשתנה $\boldsymbol{a}$ מייצג את אורך הקטע $\mathbf{AB}$.

ב $\mathbf{AC} = \boldsymbol{a} + 3$.

ג $\mathbf{AD} = \boldsymbol{a} + 6$.

ד $\mathbf{AC} =$ 11 ס"מ; $\mathbf{AD} =$ 14 ס"מ.

66 **א** $\mathbf{AB}$: מספר זוגי $(2 \cdot \boldsymbol{p} + 2 \cdot \boldsymbol{r})$;
$\mathbf{CD}$: אי-אפשר לדעת $(3 \cdot \boldsymbol{p} + 1)$. אם הערך של $\boldsymbol{p}$ הוא מספר זוגי, $\mathbf{CD}$ הוא מספר אי-זוגי.
אם הערך של $\boldsymbol{p}$ הוא מספר אי-זוגי, $\mathbf{CD}$ הוא מספר זוגי.
$\mathbf{GF}$: מספר אי-זוגי. $(2 \cdot \boldsymbol{p} + 1)$.

ב מספר אי-זוגי. אם המספר הראשון הוא זוגי, ייצוג של מספר זוגי הוא $2 \cdot \boldsymbol{n}$, ייצוג של מספר אי-זוגי העוקב לו הוא $2 \cdot \boldsymbol{n} + 1$. סכומם הוא $4 \cdot \boldsymbol{n} + 1$, שהוא ייצוג של מספר אי-זוגי.
אם המספר הראשון הוא אי-זוגי, ייצוג של מספר אי-זוגי הוא $2 \cdot \boldsymbol{n} + 1$, ייצוג של מספר זוגי העוקב לו הוא $2 \cdot \boldsymbol{n} + 1 + 1$. סכומם: $4 \cdot \boldsymbol{n} + 3$, שהוא ייצוג של מספר אי-זוגי.

משימות 67 – 70: חזרה על תרגום נתונים לפני הסוגיה הבאה: שלבי הפתרון של שאלות מילוליות. מומלץ להציע את התרגילים האלה לתלמידים המסיימים מהר את המשימות הקודמות, כדי להכין אותם לשיעור הבא.

67 ד.

68 $\boldsymbol{m} - 2$

69 **א** $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} + 7$ ו- $\boldsymbol{x} - 9$.

ב $\boldsymbol{x} - 9$ לא יכול להיות קטן מ- 1, לכן $\boldsymbol{x}$ לא יכול להיות שווה ל- 2.

ג 10

70 **א** $\boldsymbol{m} - 300$ **ב** 800 ₪.

ב.3. פתרון שאלות מילוליות

מגלים (עמ' 268)

תרגום בעיה מילולית למשוואה. התלמידים בוחרים את כרצונם לסימון המבוקש (בהמשך תשמש אות זו כנעלם). כדי לבנות משוואה מתאימה יעבדו התלמידים בשלבים, ובכל שלב הם יבחרו פעולה אחת מתאימה. הבדיקה תאפשר את בחירת הפעולה המתאימה שמקשרת בין הנתונים ומחזקת את השימוש בהצבה.
יש להוביל את התלמידים להבין שכל אגף של המשוואה מתאר אותם נתונים באופן שונה.
לדוגמה, אם התלמידים בחרו כנעלם את התרומה של תלמידי כיתה ח' (מה שטבעי, כי זה ה"מבוקש"), שני האגפים מתארים את תרומת תלמידי כיתה ז'. בצד אחד – תרמו 150 ₪ יותר מתלמידי כיתה ח', ובצד השני – תרומתם: $\boldsymbol{x} + 150 = 1{,}275$.

לומדים (עמ' 268)

שלבי הפתרון של בעיה מילולית: קריאת השאלה, סימון המבוקש באות, כתיבת המשוואה בעזרת הנתונים, פתירת המשוואה ובדיקה. המודל לפתרון מוצג בדוגמה פשוטה, והוא יחזור על עצמו בבעיות מורכבות יותר בהמשך. חשוב לבסס כאן את לימוד השלבים.

משימות

משימות 71 – 77: תרגילי תרגום נתונים על-ידי משוואות. בשלב זה אין לדרוש מהתלמידים לפתור את המשוואות שהם כותבים (לפחות אין לפעול כך עם התלמידים המתקשים).

71 א

72 1 – ג, 2 –ד, 3 – א, 4 – ב.

73 ב

74 ד

75 ד

76 ב

77 ד

78 כדאי להתחיל לפתור את השאלה מהסוף. לפי הייצוג נסמן את גיל האח הצעיר ב- x. לפיכך גיל האח השלישי $x+2$, גיל האח השני הוא $x+5$, וגיל הבכור הוא $x+7$.
$x+x+2+x+5+x+7=38$, $x=6$.
האח הצעיר בן 6, השלישי בן 8, השני בן 11 והבכור בן 13.

79
1. $5 \cdot x$; אם $AB=20$, $x=4$.
2. $x+5$; אם $AB=20$, $x=15$.
3. $x-5$; אם $AB=20$, $x=25$.
4. x; אם $AB=20$, $x=20$.
5. $x:5$; אם $AB=20$, $x=100$.

במשימות 80 – 84 התלמידים יכולים לבחור אותיות כרצונם. רצוי שהם יעבדו לפי השלבים שבדוגמה.

80 הדייג דג x דגים, לכן המשוואה המתאימה היא $x-4=13$.
לפתרון משתמשים בפעולה הפוכה: $x=13+4$. לכן הדייג דג $x=17$ דגים.

81 46 ש"ח.

82 302 אנשים.

83 6 הפסדים. משוואה אפשרית המובילה לפתרון: $x+3 \cdot x=24$.

84 750 מ'. משוואה אפשרית המובילה לפתרון: $x = 500 + 3 : x$.

85 **א** $a + 90$ **ב** $2 \cdot a + 90 = 100$ **ג** משקל הפקק הוא 5 גר'; משקל הבקבוק הוא 95 גר'.

86 **א** $x + 30$ **ב** $2 \cdot x + 30 = 100$ **ג** יש 35 אופנועים ו- 65 מכוניות במגרש.

87 **א** 60 ג'. **ב** 120 ג'. **ג** 120 ג'.

88 **א** $3 \cdot x + 4$ **ב** 6 יחידות אורך.

89 $x = 2$

90 60 חוברות.

91 64 תלמידים.

ב.4. שאלות סכום והפרש

לומדים (עמ' 272)

שאלות סכום והפרש הן סוג נפוץ של שאלות מילוליות. בדרך כלל נוח יותר לבחור את המספר הקטן משני המספרים המבוקשים כנעלם, וזאת כדי למנוע ככל האפשר חישובים בשברים. בכיתה ח' ילמדו התלמידים לפתור אותן שאלות בדרכים אחרות, על-ידי כתיבה ופתרון של מערכות משוואות.

משימות

במשימות 92 – 103 כדאי להרגיל את התלמידים לכתוב תשובה מילולית לאחר פתרון המשוואה.
כתיבת התשובה מאפשרת לבדוק אם הפתרון שהתקבל הגיוני, וכן שומרת על קשר בין המשוואה והשאלה.

92 אם המשתנה x הוא מספר הספרים שסידרה מיכל על המדף, $3 \cdot x + x = 160$ ו- $x = 40$.
מיכל סדרה 40 ספרים על המדף.

93 אם המשתנה x הוא מחיר הכובע (בשקלים), $4 \cdot x + x = 540$ ו- $x = 108$.
מחיר השמלה הוא 432 ₪. מחיר הכובע 108 ₪.

94 אם המשתנה x הוא המספר הקטן משניהם, $4 \cdot x - x = 15$ ו- $x = 5$.
מספר אחד הוא 5 והמספר האחר הוא 15.

95 אם המשתנה x הוא הגיל של סמדר, $6 \cdot x - 5 = 43$ ו- $x = 8$. סמדר בת 8.

96 אם המשתנה x הוא המספר הקטן משניהם, $2 \cdot x + x = 27$ ו- $x = 9$.
מספר אחד הוא 9 והמספר השני הוא 18.

97 אם המשתנה x הוא מחיר החולצה (בשקלים), $x + x + 50 = 190$ ו- $x = 70$.
מחיר המכנסיים הוא 120 ₪ ומחיר החולצה 70 ₪.

98 אם המשתנה x הוא תכולתו של הבקבוק הקטן (בליטר), $x + x + 1 = 2$ ו- $x = 0.5$.
תכולתו של הבקבוק הקטן היא 0.5 ליטר ותכולתו של הבקבוק הגדול היא 1 ל'.

99 אם המשתנה x הוא מחיר הבקבוק הריק (בשקלים), $x + x + 29.6 = 30$ ו- $x = 0.3$.
מחיר הבקבוק הריק 0.3 ₪, מחיר היין 29.3 ₪.

בתרגילים 100 – 103 משולבים המושגים "מספרים עוקבים", "מספרים זוגיים עוקבים". רצוי לתת דוגמה לביטויים אלגבריים המתארים מצב מסוג זה (כגון x ו- $x + 1$) לפני שהתלמידים יתחילו לפתור את המשימות בעצמם.

בתרגילים 100 – 101: נסמן ב- x את המספר המבוקש הקטן ביותר.

100 27 ו- 28. משוואה אפשרית המובילה לפתרון: $x + (x + 1) = 55$.

101 $3 \cdot x + 3$

102 $3 \cdot x - 3$

103 נסמן ב- x את המספר המבוקש הקטן ביותר.

104 11, 12, 13. משוואה אפשרית המובילה לפתרון: $x + (x + 1) + (x + 2) = 36$.

105 35 גזרים.

106 13 ס"מ × 8 ס"מ.

מיומנויות עמ' 275

עמוד זה מוקדש לניתוח שאלה מילולית ברמה יחסית גבוהה. הדגש הוא על כתיבת נתונים המופיעים בשאלה מילולית בצורה אלגברית. פתרון המשוואה הסופית נעשה על-ידי כינוס איברים דומים. (דרך אחרת, שאינה מוצגת בעמוד זה היא, ניסוי וטעייה.
דרך זו מאפשרת לבצע הצבות רבות ומראה את תפקיד הצבת מספר במשוואה לבדיקת פתרונה. במשך שנים רבות הייתה דרך זו הדרך לפתרון משוואות, המועדפת בסין.

מוכנים להמשיך? עמ' 276

1. א 2. ב 3. ב 4. ב 5. ג 6. ב 7. ג 8. א 9. ג 10. א

תרגילים נוספים עמ' 277

תרגילים 106 – 107 קלים, לכן הם מומלצים לתלמידים המתקשים. בפריטים ה–ו של תרגיל 106 רצוי לוודא שהתלמידים יודעים את סדר פעולות החשבון.

106 א, ג, ה, ו.

107 א $x = 9$ ב $x = 8$ ג $x = 7$ ד $x = 6$

ה $x = 11$ ו $x = 32$ ז $x = 51$ ח $x = 42$

בתרגילים 108 – 112 אם התלמידים עדיין טועים, אפשר להרחיב את הסעיפים על-ידי החלפת הפעולה הנתונה במשוואה, בפעולה אחרת, כדי שהתלמידים יבחינו בין המקרים השונים.

לדוגמה: בתרגיל 110 אפשר להוסיף את הפריטים: $x - 4 = 4$, $x \cdot 4 = 4$ ו- $x : 4 = 4$.

108 א $x = 4\frac{1}{3}$ ב $x = 2$ ג $x = 4\frac{4}{5}$ ד $x = 7$

109 א $x = 96$ ב $x = 15$ ג $x = 57$ ד $x = 25$ ה $x = 484$ ו $x = 87$

110 א $x = 0$ ב $x = 36$ ג $x = 0$ ד $x = 85$

ה $x = 0$ ו $x = 34$ ז $x = 0$ ח $x = 17$

111 א $x = 24$ ב $x = 20$ ג $x = 50$ ד $x = 35$

112 א $x = 6$ ב $x = 3$ ג $x = 48$ ד $x = 45$

115 א. $x = 3$ ב $x = 9$ ג $x = 3$ ד $x = 9$

116 א $x = 3$ ב $x = 2$ ג $x = 11$ ד $x = 19$

117 ב

118 א $n = 21$ ב $n = 15$ ג $n = 50$

119 המספר הוא 10. השאלה די קשה, כי יש לכתוב משוואה (למשל, $8 \cdot x - 20 = 30 + 3 \cdot x$) שהמשתנה שלה מופיע בשני האגפים, מה שהתלמידים אינם רגילים לעשות.

120 א $2 \cdot m + 1 = 45$ $(m + m + 1 = 45)$

ב $2 \cdot y - 1 = 45$ $(y + y - 1 = 45)$

ג $3 \cdot x + 3 = 57$ $(x + 2 + x + 1 + x = 57)$

ד $3 \cdot x - 3 = 57$ $(x + x - 1 + x - 2 = 57)$

ה $3 \cdot x = 57$ $(x + 1 + x + x - 1 = 57)$

121 נסמן ב– x את מספר הק"מ שנותרו עד הפקק. לפי הנתונים מקבלים: $3 + x = 7$ לכן $x = 4$.
נותרו 4 ק"מ עד הפקק.

122 **א** 12 **ב** 17 ס"מ **ג** 125 ₪ **ד** 54 ₪ **ה** 66 עמודים

124 $4 \cdot (y + 3) = 36$. מכאן $y = 6$, כלומר אורך המלבן הוא 6 ס"מ.

125 108 ו- 27.

126 5.126

127 29.127 ₪

בתרגילים 128 – 130: נסמן ב- x את המספר המבוקש הקטן ביותר.

128 16 ו- 17. משוואה אפשרית המובילה לפתרון: $x + (x + 1) = 33$.

129 26 ו- 27. משוואה אפשרית המובילה לפתרון: $x + (x + 1) = 53$.

130 110, 111 ו- 112. משוואה אפשרית המובילה לפתרון: $x + (x + 1) + (x + 2) = 333$.

בתרגילים 131 – 132: נסמן ב– $2 \cdot x$ את המספר המבוקש (הזוגי) הקטן ביותר.

131 22, 24, 26, 28.
משוואה אפשרית המובילה לפתרון: $2 \cdot x + 2 \cdot (x + 1) + 2 \cdot (x + 2) + 2 \cdot (x + 3) = 100$.
משוואה נוספת: $2 \cdot x + 2 \cdot x + 2 + 2 \cdot x + 4 + 2 \cdot x + 6 = 100$.
דרך אחרת: הממוצע של ארבעת המספרים הוא $100 : 4 = 25$, ולכן המספרים העוקבים הם 22, 24, 26, 28.

132 12, 14, 16, 18.
משוואה אפשרית המובילה לפתרון: $2 \cdot x + 2 \cdot (x + 1) + 2 \cdot (x + 2) + 2 \cdot (x + 3) = 60$.
משוואה נוספת: $2 \cdot x + 2 \cdot x + 2 + 2 \cdot x + 4 + 2 \cdot x + 6 = 60$.
דרך אחרת: הממוצע של ארבעת המספרים היא $60 : 4 = 15$, ולכן המספרים העוקבים הם 12, 14, 16, 18.

133 כן: כל מספר k אי-זוגי יכול להיכתב $k = 2 \cdot n + 1$, שוויון בו המספר n הוא מספר שלם,
ולכן $k = n + (n + 1)$ (המספרים n ו- $n + 1$ הם מספרים עוקבים).

134 לא. אם מנסים לכתוב $n + (n + 1) + (n + 2) = 55$ (עם n מספר שלם), מקבלים $3 \cdot n = 52$,
משוואה שפתרונה אינו מספר שלם.

135 **א** 7 מ', 8 מ', 9 מ'. **ב** 99 מ', 100 מ', 101 מ'.

136 יצחק בן 45, יעקב בן 18 ואברהם בן 77.

ממשיכים בתרגול עמ' 281

137 $11 = a + 5$ וגם $10 = a + 4$, לכן $a = 6$.

138 **א** $10 \cdot x$ **ב** $10 \cdot (x - 4)$, $10 \cdot x - 40$ **ג** $10 \cdot (x - 4) = 10 \cdot x - 40$

139 **א** $x - 10$ **ב** $2 \cdot x - 10 = 20$ **ג** 5 אנשים מרכיבים משקפיים.

140 **א** $4 \cdot (x + 5)$ **ב** $2 \cdot y$ **ג** $4 \cdot (x + 5) = 2 \cdot y$ **ד** לא **ה** $x = 10$, $y = 30$

141 לפי הנתונים, $x + 1 + x - 1 + 4 = 14$, לכן $2 \cdot x = 10$ ו- $x = 5$.
לפיכך $CA = 6$, $AB = BC = 4$ (משולש שווה-שוקיים).

142 פתרון א': 10, 10, 5; פתרון ב': 10, 7.5, 7.5.

143 20 מ'.

144 8 מטבעות. משוואה אפשרית המובילה לפתרון: $5 + 2 \cdot x = 21$.

145 5 מטבעות. משוואה אפשרית המובילה לפתרון: $5 \cdot x + 12 = 37$.

146 7 מטבעות. משוואה אפשרית המובילה לפתרון: $15 + 0.5 \cdot x = 18.5$.

147 **א** 1 מ'. **ב** 7 מ'.

148 נסמן ב- x את מספר התרנגולות. מספר הכבשים הוא $30 - x$ (30 ראשים = 30 חיות).
$2 \cdot x + 4 \cdot (30 - x) = 86$, לפיכך $x = 17$. יש 17 תרנגולות בחצר.