11. משוואות ושאלות מילוליות

רקע

נושא המשוואות הוא נושא מרכזי בהוראת האלגברה בכיתה ז' והוא נלמד לאורך כל השנה. בפרק 5 "משוואות ושאלות מילוליות" התלמידים למדו את **תכונות השוויון** המאפשרות לפתור כל משוואה ממעלה ראשונה. הם פתרו משוואות מהסוג $a \cdot x + b = c$ שפתרונותיהן הם מספרים חיוביים. בפרק 7 הם פתרו משוואות מהסוג $x + b = c$ שהפתרונות שלהן הם מספרים מכוונים, ובפרק 8 הם פתרו משוואות מהסוג $a \cdot x + b = c$ שפתרונותיהן הם מספרים מכוונים. בכל הפרקים הללו היו משולבות שאלות מילוליות שאפשר לפתור בדרך אלגברית אך גם בדרך אינטואיטיבית ואריתמטית, שאינן דורשות שימוש בביטויים אלגבריים.

בפרק הנוכחי המשוואות הן מהסוג $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ שבהן הנעלם מופיע בשני האגפים, וכבר אי-אפשר לפתור אותן בדרך אריתמטית, אלא דרך תכונות השוויון. זאת הסיבה שלכל משוואה בפרק זה מוצגת דרך פתרון יחידה, בניגוד לפרקים הקודמים, שם הוצגו שתי דרכים לפתרון של משוואות – דרך אריתמטית (פעולה הפוכה) ודרך אלגברית שמסתמכת על תכונות השוויון.

במדור הראשון (שני השיעורים הראשונים) עוסקים במיומנות של פתירת משוואות מהסוג $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ (בלי ועם סוגריים). השימוש בייצוג של מאזניים ושל קטעים ממשיך גם בפרק זה. כל יתר השיעורים בפרק עוסקים בפתירת בעיות שיש צורך לבנות להן משוואות מהסוג הנ"ל או משוואות מורכבות יותר (עם סוגריים).

כדי לא לכוון את התלמידים לפתירת שאלות בדרך סגורה ומובנית, מציגים לפני הפתרון האלגוריתמי פתרונות לא-שגרתיים, כגון פתרון על-ידי ניסוי וטעייה ופתרון על-ידי ייצוג חזותי. דרך ניסוי וטעייה מתקרבים לפתרון על-ידי בחירה של פתרון סביר או קרוב לפתרון, ובודקים את נכונות ההשערה על-ידי הצבה. פעילות זו תחייב את התלמידים לנתח את הנתונים ולכתוב משוואה המתאימה לשאלה. תלמידים מקצרים בדרך זו את התהליך הפורמלי לפתירת שאלה. מתברר שלא תמיד קל לשער מהו המספר הקרוב המתאים לנתוני שאלה. האפשרות השנייה המובאת כאן היא פתירת משוואה באמצעות ייצוג. ישנן אפשרויות לייצוג של שאלה בדרך חזותית, למשל, באמצעות קטעים, מלבנים, טבלאות וכיד הכישרון היצירתי של התלמידים. מתברר שתלמידים בוחרים ייצוגים לבטא בעזרתם את הקשרים בין הנתונים בשאלה וכך לפתור אותה. חשוב לשלב ייצוגים שונים במהלך הפתרון, ולכן יש להימנע מהיצמדות לייצוג אחד (למשל, לייצוג באמצעות טבלה), זאת כדי למנוע "קיבעון".

כמובן, יש ללמד גם את הדרך האלגברית הקלסית לפתירת שאלות מילוליות. לא כדאי לדכא את האינטואיציה ואת היצירתיות של פתרונות אפשריים שתלמידים מציעים בגיל זה. התלמידים העוברים מחשיבה קונקרטית לחשיבה מופשטת, מחפשים את ההמחשה דרך הייצוג שהם בוחרים. השיעור האחרון של הפרק עוסק בפתרון גרפי של משוואות. קישור בין נושא המשוואות לנושא הפונקציות הוא הזדמנות מתאימה להדגשת קישוריות ויחסי גומלין בין נושאים מתמטיים שונים.

השאלות הניתנות בפרק זה הן מתחומים שונים ומגוונים. בתכנית הלימודים לא מומלץ לשלב את הוראת השאלות המילוליות לפי נושאים, כגון: שאלות מספרים, שאלות אחוזים, בעיות קנייה ומכירה, רווח והפסד, בעיות גילים, בעיות תנועה ועוד. לפיכך מוצעות כאן בעיות אינטגרטיביות: תנועה ואחוזים, שטחים והיקפים ואחוזים ועוד. על-פי תכנית הלימודים על התלמידים לגשת לפתירת שאלה מילולית כעומדת בפני עצמה – ולא כשייכת לקטגוריה – ולחפש בתוכה את ההקשרים על-ידי חשיבה פתוחה, ולא על-ידי קטלוגה.

מומלץ להקדיש לפרק כ- 15 שעות.

מושגים ומונחים

משוואות שקולות, פעולות מותרות, פעולה הפוכה, בידוד הנעלם, תכונות השוויון, כינוס איברים דומים, איבר חופשי, בדיקה על-ידי הצבה, פתרון שאלה מילולית, פתירה בעזרת השערה ובדיקה, ניתוח השאלה, קירוב, פתירה בעזרת ייצוג, פתרון באמצעות ייצוג גרפי.

מטרות

התלמידים ידעו:

א לפתור משוואות מהסוג $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ כאשר נעלם מופיע בשני אגפים;

ב לפתור משוואות עם סוגריים כאשר הנעלם מופיע בשני אגפי המשוואה;

ג לפתור שאלה מילולית בעזרת ניסוי וטעייה;

ד לנתח שאלות מילוליות בעזרת ייצוג מתאים;

ה לפתור שאלה מילולית ולבנות משוואה בעזרת ייצוגים;

ו לפתור שאלה מילולית לפי שלבים בדרך פורמלית;

ז לפתור משוואות באמצעות ייצוג גרפי ולהבין קשר בין הייצוג הגרפי לבין המשוואה המתאימה.

השיעור בספר הלימוד

מגלים ולומדים עמ' 389

א. משוואות $a \cdot x + b = c \cdot x + d$

א.1. משוואות בלי סוגריים

מגלים (עמ' 567)

א משקל משמש אחד הוא 50 גר'. קל לראות את התשובה מתוך איור ב'. $(200 : 4 = 50)$

ב $4 \cdot x = 200$

ג $4 \cdot 50 = 200$

ד $5 \cdot x = x + 200$

ה $5 \cdot x + 40 = x + 240$

ו המשוואות שקולות, כי יש להן אותם המשתנים ואותו הפתרון.

במהלך הפעילות יש להדגיש את הקשר בין הייצוג באמצעות משוואה לבין הייצוג במאזניים.

לומדים (עמ' 567)

יש להזכיר מהו דגם של משוואות – התפקידים של a ו- b שונים מהתפקיד של x, שהוא במקרה הזה הנעלם. קשה יותר לפתור משוואות מסוג זה בדרך אינטואיטיבית. לכן בפרק זה מוצע לפתור משוואות באמצעות יצירת משוואות שקולות על-ידי תכונות השוויון – אפשר להוסיף לשני האגפים או לחסר משני האגפים אותו ביטוי וכן לכפול או לחלק את שני האגפים באותו ביטוי (שונה מ- 0) – ובתכונת ההצבה – אפשר להחליף ביטוי בביטוי שקול. לא מזכירים יותר דרך אינטואיטיבית לפתרון. בשלב זה אופן הפתרון מפורט ביותר, ואפשר לקרוא את החלק הזה עם התלמידים. במהלך הקריאה מומלץ לשאול כיצד עוברים משורה לשורה, ובאיזו פעולה משתמשים. כמו-כן מומלץ להדגיש את אופן הרישום של הפעולה (סימון לוכסן|). בשלב זה חשוב לפתח הרגלי רישום נכונים אצל התלמידים. לאחר קבלת התשובה, יש לבצע בדיקה – להציב במשוואה המקורית את הפתרון שהתקבל ולראות אם מגיעים לשוויון שמתקיים. שלב הבדיקה הוא שלב חשוב, ויש להדגיש זאת ולהרגיל את התלמידים לבצע בדיקה בסיום פתרון של משוואה.

בכיתות החלשות מומלץ לציין בצבע (על הלוח) את ערך הפתרון המוצב. מבצעים את חישובי הבדיקה בשני האגפים **בנפרד**. הפתרון נכון אם מקבלים אותה תוצאה.

משימות

במשימות 1 – 4 מופיעים איורים המקלים את כתיבת המשוואות. כבר בשלב זה יש להקפיד על כתיבה נכונה של הפתרון.

1
- **א** $3 \cdot x = 2 \cdot x + 100$
- **ב** תכונת השוויון, מסירים שני אגסים מכל כף.
- **ג** $x = 100$
- **ד** כן. תכונת השוויון.
- **ה** $3 \cdot x = x + 100$. תכונת השוויון, מסירים משמש אחד מכל כף. $2 \cdot x = 100$. כן.

2
- **א** $3 \cdot x + 100 = x + 600$
- **ב** מסירים קובייה אחת מכל כף.

3

$$3 \cdot x + 100 = 2 \cdot x + 260 \quad | -2 \cdot x$$
$$x + 100 = 260 \quad | -100$$
$$x = 160$$

4 ניתוח השלבים של פתרון משוואה. אפשר לפתור את המשימה בעל-פה לאחר כתיבת המשוואה על הלוח.
- **א** $3 \cdot x + 100 = x + 400$
- **ב** מסירים אגס אחד מכל כף.
- **ה** 150 גרם.

במשימות 5 – 6 המשוואות פתורות. על התלמידים לנתח את השלבים. אפשר לבצע את המשימות בעל-פה.

7 חשוב לפתור את המשימה בעל-פה. המטרה היא לאפשר לתלמידים לבטא את הפעולות הנדרשות לפתרון משוואה. בכל הסעיפים נעזרים בתכונת השוויון: הוספה או חיסור של אותה כמות בשני האגפים.

8 נתונים שלבים של פתרון משוואות, ויש לסדרם בסדר הנכון. (**א–יא–ה**); (**ב–ז–יב**); (**ג–ח–ו**); (**ד–ט–י**).

9 **א** משקל הקובייה 150 גר'. כדי שה"מובייל" יהיה מאוזן, $400 + x$ צריך להיות שווה למשקל של $3 \cdot x + 100$, לכן $400 + x = 3 \cdot x + 100$, $x = 150$.

10 $30 + 5 \cdot x = 2 \cdot x + 150$ **ב** מסירים שתי קוביות מכל כף. **ג** $30 + 3 \cdot x = 150$

11 המחשת משוואה על-ידי קטעים. ההמחשה מאפשרת "לראות" את המשוואות השקולות ולבדוק את הפתרון. $2 \cdot x + 30 = 5 \cdot x + 12$; $30 = 3 \cdot x + 12$; $x = 6$.

12 משימה דומה למשימות 7 – 8. בכיתות החזקות אפשר לוותר עליה .

13 תשובה ג.

14 חלק מהפתרונות הם שברים. תלמידים נוטים לחשוב ששבר איננו פתרון אפשרי של משוואה.

א 1 **ב** 1 **ג** 1 **ד** -2 **ה** 2 **ו** $\frac{5}{9}$ **ז** -1 **ח** 1 **ט** $-\frac{2}{5}$

15 **א** 0 **ב** 8 **ג** 9 **ד** -3 **ה** 7 **ו** 6 **ז** -2 **ח** -3 **ט** -8

16 **א** $x = 6$ **ב** $x = 3$ **ג** $x = -1$

17 משימה לכיתות חזקות. לפתרון המשוואות נדרש כינוס איברים דומים, והחישובים אינם נוחים.

א -7 **ב** 13 **ג** $\frac{2}{3}$ **ד** -13 **ה** $\frac{14}{3}$ **ו** 9

פיצוחים

18 על התלמידים "לפרק את הביטוי באגף הימני וכך לגלות את הביטוי החסר.

א $x + 2$ **ב** $2 - x$ **ג** $x - 2$ **ד** $x + 2$

19 הכנה לקטע השיעור הבא.

בכל סעיף למקדמי הנעלם יש מכנה משותף. במקרה של קושי אפשר להציע לתלמידים להשתמש במשתנה עזר. לדוגמה, בסעיף א' אפשר לקבוע $y = \frac{x}{2}$, כלומר $x = 2 \cdot y$, ולקבל את המשוואה $3 \cdot y = y + 1$. לפיכך $2 \cdot y = 1$ ו- $x = 1$.

א $x = 1$ **ב** $x = 3$ **ג** $y = 1$ **ד** $y = 3$

לומדים (עמ' 572)

כאן מסבירים את כללי הפתרון של משוואות שיש בהן שברים. הכללים זהים לאלה של משוואות במספרים שלמים. חשוב לראות את הכללים האחידים בפתרון של משוואות מסוגים שונים ולא ליצור חלוקה מלאכותית בין סוגים שונים של משוואות. יש חשיבות גדולה לשימוש בשפה מתמטית נכונה. גם כאן חשוב לא לשכוח את שלב הבדיקה ולראותו כחלק בלתי-נפרד מתהליך הפתרון.

כאשר ערכי הפרמטרים a ו- b הם שברים, בולטת היעילות בשימוש בתכונות השוויון.

משימות

20 רצוי לפתור את המשימה בעל-פה. המטרה היא לאפשר לתלמידים לבטא את הפעולות הנדרשות לפתרון משוואה כאשר מקדמי הנעלם הם שברים.

21
א $x = 5$ ב $y = 18$ ג $x = 2$ ד $x = -2$
ה $x = 25$ ו $y = 36$ ז $x = 12$ ח $x = 7$

22
א $y = -4$ ב $s = 10$ ג $x = 12$ ד $t = 25$
ה $x = 100$ ו $y = 22$ ז $x = 48$ ח $x = 24$

23
א $x = 10$ ב $x = -2$ ג $x = 2$ ד $x = 2$ ה $x = 2$
ו $x = 0$ ז $x = 20$ ח $x = -500$ ט $x = 90$

פיצוחים

24 דוגמאות: $23 + x = 5 \cdot x + 7$ $(x = 4)$; $x - 23 = 5 \cdot x - 7$ $(x = -4)$.

א.2. משוואות עם סוגריים

מגלים (עמ' 574)

א משוואה אחת מתקבלת מהמשוואה האחרת על-ידי פתיחת הסוגריים בתוך כדי שימוש בחוק הפילוג מעל החיבור.

ב משוואה אחת מתקבלת מהמשוואה האחרת על-ידי פתיחת הסוגריים בשני אגפי השוויון בתוך כדי שימוש בחוק הפילוג מעל החיסור באגף השמאלי ומעל החיבור באגף הימני. יש לשים לב כי באגף הימני כופלים ב- (-3), ולכן סימן הפעולה מתחלף.

ג משוואה אחת מתקבלת מהמשוואה האחרת על-ידי פתיחת הסוגריים בתוך כדי שימוש בחוק הפילוג מעל החיסור. יש לשים לב כי כופלים ב- (-1), ולכן סימן הפעולה מתחלף.

כאשר התלמידים מחפשים הסבר לשקילות המשוואות, הם חוזרים על הנושא של ביטויים שקולים ועל כל הנימוקים המתמטיים שהוזכרו בעבר.

לומדים (עמ' 574)

כדי לפתור משוואות שיש בהן סוגריים, תחילה פותחים את הסוגריים, ולאחר מכן פועלים על-פי כל השלבים המוכרים מפתרון המשוואות ללא סוגריים. יש להדגיש את הדמיון בין כל סוגי המשוואות ולהראות כי בשלבים המתקדמים, התהליך של כל סוגי המשוואות שנלמדו עד לשלב זה דומה. גם כאן יש לשים דגש על רישום נכון של פעולות מותרות ועל שימוש בשפה מתמטית נכונה שמדגיש את השימוש בפעולות המותרות: מוסיפים לשני האגפים מספר..., מחלקים את שני האגפים במספר .. (שונה מ- 0) וכדומה. יש להקפיד לבצע את שלב

הבדיקה כחלק אינטגרלי מתהליך הפתרון. במהלך הפתרון של משוואות מורכבות פועלים על-פי רוב בשלבים האלה: פתיחת סוגריים באמצעות חוק הפילוג, כינוס איברים דומים, בידוד המשתנה ובדיקה. חשוב לרשום כל שלב בשורה נפרדת ומימין לשמאל לרשום את הפעולה שנעשה בה שימוש באותו השלב. הדבר מסייע לסדר את הפתרון וגם מקל במציאת שגיאות אם יהיו.

פתיחת סוגריים אינה הכרחית בפתירת משוואות כאלה.

דוגמה: $5 \cdot (4 \cdot x + 3) = 15 \cdot x + 10$

$4 \cdot x + 3 = 3 \cdot x + 2$

$4 \cdot x - 3 \cdot x = 2 - 3$

$x = -1$

קיימות שיטות אחרות.

משימות

יש לעודד את התלמידים לבדוק את תשובתם על-ידי הצבת הפתרון בשני האגפים.

25 א $x = 16$ ב $x = -1$ ג $x = 3$ ד $x = 10$
ה $x = 6$ ו $x = \frac{2}{3}$ ז $x = 8$ ח $x = 4$

26 א $x = 3$ ב $x = 2$ ג $x = 4$ ד $y = -20$ ה $y = -4$
ו $y = -10$ ז $x = 6$ ח $x = 10$ ט $x = 4$

27 א $x = -9$ ב $x = 2$ ג $x = -7$ ד $y = -9$ ה $x = -10$
ו $x = -22$ ז $x = -6$ ח $x = 5$ ט $x = -1$

28 א $x = 2$ ב $x = -1$ ג $x = 9$ ד $x = 5$ ה $x = 9$
ו $x = -7$ ז $x = 8$ ח $x = 3$ ט $x = 3$

29 א $x = 3$ ב $x = -17$ ג $y = -1$
ד $y = 5$ ה $s = 6$ ו $x = \frac{2}{3}$

30 א $x = -1$ ב $y = \frac{1}{2}$

31 המעבר מצורה מילולית לצורה מתמטית אינו פשוט תמיד. פתרון תרגילים מסוג זה לאורך כל הדרך יכול לעזור לתלמידים להתמודד עם הקושי.

א $2 \cdot x - 3 = x + 5$, $x = 8$ ב $7 \cdot x = 25 + 2 \cdot x$, $x = 5$

ג $4 \cdot x - 9 = 3 \cdot x - 1$, $x = 8$ ד $5 \cdot x + 3 = 2 \cdot x + 15$, $x = 4$

ה $4 \cdot x + 10 = 9 \cdot x - 50$, $x = 12$ ו $3 \cdot x - 250 = 7 \cdot x - 150$, $x = -25$

(את המושג "*גדול מ-*" ניתן לתרגם ל"הפרש").

32 תכונות השוויון חלות גם על ביטוים אלגבריים. התלמידים עדיין אינם רגילים להוסיף אותו **ביטוי** לשני האגפים או לחסר אותו ביטוי משני האגפים (עד כה הם עבדו בשלבים והוסיפו או חיסרו מספר בודד או משתנה בודד). רפאל השתמש פעמיים בתכונות השוויון.

33 ב ו- ג: במשימה נדרשת השוואה בין כל משוואה לבין המשוואה הנתונה ולחילופין נדרשת כתיבה של רשימת משוואות שקולות למשוואה הנתונה.

34 במשימה זו מומלץ לדון בכיתה ואף לחזור על תכונות השוויון.

35 **א** -8 **ב** -4 **ג** 9 **ד** 2 **ה** -3 **ו** -2 **ז** 5 **ח** 4 **ט** -5

ב. שאלות מילוליות

ב.1. ניתוח בעזרת בדיקה

מגלים (עמ' 577)

אם ארז היום בן 4, אז יונתן היום בן 16.
בעוד 4 שנים יהיה ארז בן 8, ויונתן בן 20. 20 לא גדול מ- 8 פי שניים, לכן ההנחה לא נכונה, וארז לא בן 4 היום.
אם ארז היום בן 2, אז יונתן היום בן 8.
בעוד 4 שנים יהיה ארז בן 6, ויונתן בן 12. 12 גדול מ- 6 פי שניים, ולכן ההנחה נכונה, וארז יכול להיות היום בן 2.

בשאלה זו התלמידים בודקים שתי אפשרויות להצבת מספרים בנתוני השאלה. ישנם ילדים שפתרו כך שאלות בעבר, וכאן הם מקבלים לגיטימציה לדרך הפתרון המוכרת. התלמידים לא כתבו משוואה, אך ניתוח הנתונים וניסוי וטעייה אפשר להם להגיע לתשובה.

לומדים (עמ' 577)

פתרון של שאלות מילוליות הוא אחד הנושאים המאתגרים שמלווים את התלמיד לאורך כל לימודי המקצוע מכיתות היסוד ועד לסיום הלימודים בבית הספר. אחת הדרכים להקל את תהליך הפתרון הוא לעבוד בשלבים ברורים ומוגדרים מראש. בחלק זה של השיעור מוצגת מסגרת לפתרון של שאלות מילוליות בארבעה שלבים:

1. הבנת הטקסט והקשרים בין הנתונים;
2. תרגום הקשרים למשוואה;
3. פתרון המשוואה;
4. בדיקת נכונות הפתרון והתאמתו לנתוני השאלה.

כל ארבעת השלבים נחוצים לפתרון, ואם בוחרים להשתמש במסגרת המוצעת, חשוב להקפיד ולהרגיל את התלמידים לבצע את כל השלבים.

כדי להקל את השלב של כתיבת המשוואה, השלב הקשה, מוצע להיעזר בשלבי ביניים – שיטת ניסוי וטעייה. במתמטיקה מכבדים גם את הדרך של ניסוי וטעייה, של השערה ובדיקתה. נושאים בתורת הגבולות ובחשבון דיפרנציאלי מבוססים על שיטות של קירוב. לא-מעט משפטים מבוססים על השערה, ורק לאחר מכן מבססים

את נכונותה. בכל השאלות והמשוואות, כאשר מבצעים בדיקת השערות שונות, מומלץ להדגיש את המספרים לבדיקה בצבע שונה.

בשלב זה התלמידים מציעים פתרון אפשרי ונעזרים בו כדי לתרגם את כל הקשרים והנתונים של השאלה.

בסופו של התהליך התלמידים רואים עד כמה הפתרון שלהם היה קרוב או רחוק מהפתרון האמתי וגם מחליפים את ה"ניחוש" בנעלם וכך כותבים משוואה. כמובן, לא מנסים מספרים באקראי בלי סוף, ויש לקרוא היטב את השאלה ולהבינה כדי לבחור מספר סביר.

ילדים אוהבים לנסות לחפש, הם רואים בכך משחק ואתגר יותר מאשר פתרון בעזרת משתנים ותרגום נתונים לביטויים אלגבריים.

כמובן, יש להסביר לתלמידים כי הדרך הפורמלית היא יסודית יותר ומתאימה לכל המקרים. זוהי דרך "בטוחה". עם זאת אין להזניח דרכים אחרות לפתרון, ובייחוד דרך ניסוי וטעייה המאפשרת לתלמידים כלי לפיתוח החוש המספרי וגם כלי עזר בבניית משוואות מהניחוש הראשון, גם אם הוא אינו נכון. אם בוחרים להשתמש בשיטה זו, חשוב לאפשר לתלמידים לבחור מגוון של פתרונות אפשריים ולדבר אתם על הבחירה – האם הניחוש היה קרוב לפתרון הרצוי או רחוק ממנו, וכיצד אפשר לשפר את הבחירה כדי להגיע לפתרון האמתי.

משימות

במשימות 36 – 37 המספרים לבדיקה נתונים. במשימה 38 יש לבחור מספרים לבדיקה.

36 אגפי המשוואה נתונים בדוגמה. יש להציב בהם את המספרים ולבדוק אם מתקבל שוויון.

א–ב לא. **ג** כן.

37 ההפרש בין שני מספרים אי-זוגיים (או זוגיים) עוקבים הוא 2, לעומת זאת ההפרש בין שני מספרים עוקבים הוא 1.

א 10 לא מתאים, משום שהוא אינו מספר אי-זוגי.

ב אם המספר הראשון הוא 21, המספר השני הוא 23 והשלישי 25. סכום המספר הראשון והאחרון הוא 46 $(21 + 25)$. 46 גדול מהמספר השני ב- 23 $(46 - 23)$, ולא ב- 27 ככתוב בנתון.

ג לא מתאים.

ד מתאים. הבדיקה כמו בסעיף ב'.

ה דוגמה: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} + 4 = \boldsymbol{x} + 2 + 27$.

38 כדאי לבדוק מה יכול להיות פתרון סביר. גילה של לילך צריך להיות מספר "קטן", כיוון שכפליים גילה גדול מגילה היום רק ב- 3. הגיל המתאים הוא 3.

ג $\boldsymbol{x} + 3 = 2 \cdot \boldsymbol{x}$

39 שאלה מילולית שהתשובה עליה היא מספר שלילי (-5). לפני 5 שנים.

40 הבן בן 28 שנים.

41 לרחל היו עשרה מטבעות, ללאה היו שלושים מטבעות. $\boldsymbol{x} + 10 = 3 \cdot \boldsymbol{x} - 10$.

42 **א** לא. היה להם אותו מספר של מטבעות, אבל הסכום שונה בגלל הערך השונה של המטבעות.

ב לישי 104 ₪ $(\mathbf{10} \cdot 10 + 4)$, לאלישיב 69 ₪ $(\mathbf{10} \cdot 5 + 19)$.

ג לישי 14 ₪ $(\mathbf{1} \cdot 10 + 4)$, לאלישיב 24 ₪ $(\mathbf{1} \cdot 5 + 19)$.

ד לישי $10 \cdot \boldsymbol{x}$, ולאחר התוספת $10 \cdot \boldsymbol{x} + 4$; לאלישיב $5 \cdot \boldsymbol{x} + 19$.
לפיכך התלמידים יכולים למצוא את הפתרון: שלושה מטבעות.

43 התלמידים אינם חייבים להשתמש בניסוי וטעייה. הקושי הוא לתרגם "ייוותרו" בפעולת חיבור. 50 ₪.
$4 \cdot \boldsymbol{x} + 35 = 6 \cdot \boldsymbol{x} - 65$

44 על כל דף היו 20 מדבקות. $3 \cdot \boldsymbol{x} + 25 = 2 \cdot \boldsymbol{x} + 45$.

45 **א–ב** לא. **ג** כן, שישה קילומטרים. אפשר לבדוק כל מספר בשאלה.

46 **א** לא. ספרת העשרות גדולה מספרת היחידות פי שניים, לכן היא חייבת להיות מספר זוגי.

ב כיוון שספרת העשרות חייבת להיות מספר זוגי, האפשרויות הן 21, 42, 63, 84.

ג המספר היחיד המתאים הוא 84.

47 **א** לא. ספרת העשרות חייבת להיות מספר זוגי, כיוון שהיא גדולה מספרת היחידות פי שניים.

ב לא. ספרת היחידות קטנה מספרת המאות פי ארבעה. (ספרת היחידות קטנה מספרת העשרות פי שניים, וזו קטנה מספרת המאות פי שניים.) אם ספרת היחידות תהיה 3, ספרת המאות תהיה 12 $(3 \cdot 4)$.

ג האפשרויות הן 421, 842.

ד המספר היחיד המתאים הוא 421.

ב.2. ניתוח בעזרת ייצוג

מגלים (עמ' 580)

א בשיעור מופיעות שתי סכמות: בסכמה א' מופיעים ריבוע ומשולש, כולל הקשרים בין אורכי הצלעות שלהם. בסכמה ב' מופיעה "פריסה" של היקף הצורות. רואים בסכמה כי ההיקף של שתי הצורות זהה. המשתנה $\boldsymbol{x}$ מייצג את אורך צלע הריבוע.

ב סכמה א' מייצגת את המצב הגאומטרי, ואפשר לכתוב לפיה משוואה. מתוך סכמה ב' אפשר לראות ש- $\boldsymbol{x}$ שווה ל- 3. אפשר לפתור את השאלה ללא בניית משוואה.

לומדים (עמ' 580)

ייצוג של שאלה באמצעות סכמה הוא אחד הכלים המקל את הפתרון של שאלה מילולית. פעמים רבות עצם החשיבה על הייצוג מסייעת בהבנת הנתונים והקשרים בין הנתונים השונים. ייצוג בשאלה מילולית יכול להוות כלי עזר בפתרון של שאלה מילולית. למשל, אם רוצים להפוך את השאלה לקלה יותר, אפשר להראות בצד השאלה ייצוג מתאים. דרך נוספת להקל את הפתרון של שאלה מילולית – לבקש מהתלמידים לייצג את הנתונים בצורה סכמטית.

בפרק זה נלמד סוגים שונים של ייצוגים – ייצוג באמצעות קטעים, ייצוג באמצעות שטחים. מומלץ מאוד לא

לוותר על שלב של ייצוג, בייחוד בשלב כה מוקדם של לימוד הנושא. הייצוג מגשר בין פתרון בדרך אינטואיטיבית לפתרון בצורה פורמלית.

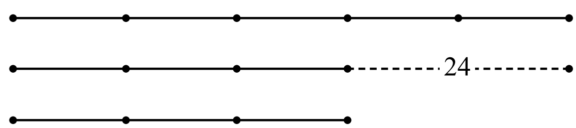
בפרק משולבות שאלות בנושאים שונים ומגוונים. על-פי הדרישה בתכנית הלימודים החדשה, אין חלוקה לסוגי שאלות (גילים, מספרים, רווח והפסד, תנועה). התלמידים פותרים כל בעיה בפני עצמה, בלי להתייחס לקטגוריה שהיא שייכת אליה, ופותרים אותה כרצונם. התלמידים בוחרים בעצמם את הייצוג הנוח להם, או אף לא נעזרים בייצוג. עליהם להסביר את דרך הפתרון, לציין מהו הנעלם ומהם הקשרים בין הנתונים, לבנות משוואה מתאימה, לפתור אותה ולהגיע לתשובה ולבדוק את התשובה שקיבל.

יש לכתוב תשובה מילולית בסוף השאלה, ולא להסתפק בתשובה מספרית. התשובה המילולית מאפשרת לבדוק אם התשובה הגיונית, וכן היא יוצרת קישור עם השאלה.

משימות

48 **א** לפי הסכמה, $2 \cdot \boldsymbol{x} - 2 = 6$. **ב** $3 \cdot \boldsymbol{x} + 6 = 5 \cdot \boldsymbol{x} - 2$, $\boldsymbol{x} = 4$. המספר הוא 4.

49 $5 \cdot \boldsymbol{x} - 24 = 3 \cdot \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} = 12$. המספר הוא 12.



50 300 גרם. אפשר לבצע את המשימה בעל-פה. התלמידים אינם חייבים לכתוב את המשוואה.

51 קל יותר לסרטט סכמה ממאזניים. רואים שהמשקל של חמישה כדורים הוא 1,850 גרם $(2{,}060 - 210)$, ולכן המשקל של כל כדור הוא 370 גרם $(1{,}850 : 5)$.

במשימות 52 – 55 מתייחסים לשני סוגי השוואה בין גילים: השוואה באמצעות הפרש והשוואה באמצעות יחס. ההפרש בין גילי שני אנשים אינו משתנה, ואילו היחס בין הגילים משתנה. ככל שעובר הזמן, היחס בין גיל המבוגר לגיל הצעיר הולך וקטן. בכיתות החזקות אפשר לחקור את הסוגיה.

52 אפשר לבצע את המשימה בעל-פה הודות לסכמה.

ד כאשר בנימין יהיה גדול מזאב פי שניים, ההפרש בין הגילים יהיה הגיל של זאב. ההפרש הקבוע בין שני הגילים הוא 8, לכן זאב יהיה בן 8.

53 יש להסביר לתלמידים שהביטוי $2 \cdot \boldsymbol{a}$ מייצג את התוספת לגילים של שני הילדים.

א לפי הסכמה, בעוד 29 שנים. $49 + \boldsymbol{a} = 12 + 8 + 2 \cdot \boldsymbol{a}$

54 **א** לא. הפרש הגילים קבוע.

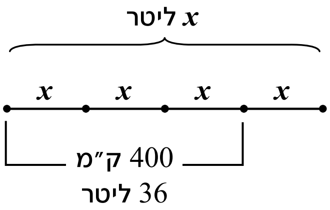
ב בסכמה מתוארים הגילים של שרה ושל רחל היום ובעוד 8 שנים.

1 הפרש הגילים הוא קבוע.

2 בעוד 8 שנים תהיה רחל מבוגרת משרה פי שניים. לקריאה נוחה נכתבו 8 השנים שנוספו, בצד שמאל של הסכמה. (חוק החילוף חל על פעולת החיבור.) כאמור, כאשר תהיה רחל מבוגרת משרה פי שניים, ההפרש בין הגילים יהיה הגיל של שרה (29).

ג היום שרה בת 21.

<u>הרחבה</u>: מה הגילים של הבנות בעוד 8 שנים? (29 ו- 58) והיום? (21 ו- 50)



55 המשתנה x מייצג את קיבולת המכל.
אפשר לפתור את המשימה על-ידי סקיצה
או על-ידי ההיסק "הצריכה ל- 400 ק"מ היא 36 ליטר
שהם שלושה רבעים מקיבולת המכל, לכן הקיבולת היא 48 ליטר."

56 שני האיורים מובאים במטרה להראות לתלמידים שאין צורך לצייר את כל הפרטים.

ג כן.

ד המרחק הוא מספר השעות כפול הזמן. 10 פעמים מספר השעות. $10 \cdot x$.

ה 5 פעמים מספר השעות. $5 \cdot x$.

ו הצב: $4 + 10 \cdot x$, החילזון: $19 + 5 \cdot x$

ז $19 + 5 \cdot x = 4 + 10 \cdot x$, $x = 3$. כל אחד מהם היה בדרך 3 שעות.
המרחק בין העץ לרמזור הוא 34 מ'. $4 + 10 \cdot 3 = 34$, $19 + 5 \cdot 3 = 34$.

57 הכנה לקטע השיעור הבא.

ב $(x - 2) \cdot 15 = x \cdot 12$, $x = 10$. בכל אחד מ- 12 הקרונות היו בהתחלה עשרה נוסעים.

<u>לומדים (עמ' 583)</u>

כאן מוצג שימוש בטבלה כאחד הייצוגים האפשריים של שאלה מילולית. יש להימנע משימוש בייצוג אחד בלבד של שאלות מילוליות, אלא יש לחשוף את התלמידים למגוון של ייצוגים, ואף להתמיד ולהשתמש במגוון של ייצוגים לפתרון שאלות שונות כדי לפתח גמישות בחשיבה ובפתרון משוואות ולא "לקבע" דרך חשיבה בתבנית מסוימת.

הייצוג שמשתמשים בו להמחשת הנתונים והקשרים ביניהם תלוי בשאלה. ייצוג על-ידי קטעים הוא שימושי מאוד בהרבה שאלות, כדי לייצג מכפלה אפשר להשתמש בייצוג של מלבן, ארגון נתונים בטבלה הוא טוב כאשר קיימת התפתחות של תופעות כמו בשאלות גיל ורווח והפסד. חשוב שהתלמידים יבחרו בעצמם את הייצוג הנוח להם. אין "להכתיב" את הייצוג, בייחוד לא בשלב התחלתי של הלימוד. עם זאת אפשר להציג ייצוגים בדוגמאות, אך התלמידים יבחרו בייצוג בהתאם להבנתם. יש תלמידים שאינם זקוקים לייצוגים, ולכן אין לדרוש סכמות קבועות לסוגי שאלות מילוליות.

בפרק משולבות שאלות בנושאים שונים ומגוונים. התלמידים ייגשו לכל בעיה בפני עצמה – בלי לחשוב לאיזו קטגוריה היא שייכת – ויפתרו אותה כרצונם. התלמידים בוחרים בעצמם את הייצוג הנוח להם, או לא נעזרים בייצוג, אך הם חייבים להסביר את דרך הפתרון, לציין מהו הנעלם ומהם הקשרים בין הנתונים, לבנות משוואה מתאימה, לפתור אותה ולהגיע לתשובה, ולבדוק את התשובה שקיבלו.
קטע השיעור מוקדש לייצוג באמצעות טבלה, ומודגם השלב של בניית משוואה (ללא הפתרון). בחלק הזה מודגש השלב המקדים לפתרון משוואה, דהיינו השלב של ניתוח באמצעות ייצוג, השלב של הגדרת הנעלם, ייצוג הנתונים האחרים באמצעות הנעלם ובניית משוואה שמתאימה לנתוני השאלה. בניית ייצוג ובחירת משתנה מתבצעות לפי בחירת התלמידים, ולכן אין לצפות לדרך ביצוע אחידה. מומלץ לעודד דרכים שונות לפתרון ולתת לתלמידים לגיטימציה. במידת האפשר מומלץ להציג על הלוח מספר פתרונות לאותה שאלה ולדון בדמיון ובשוני בין הפתרונות השונים.
בדוגמה המופיעה בשיעור, יש להבדיל בין מספר המטבעות לבין ערך המטבעות (סכום הכסף בפועל).

משימות

58 **א** נוח יותר לבחור את מספר המטבעות של חצי שקל כנעלם. (קל יותר לכפול 0.5 בנעלם מאשר בהפרש בין 13 והנעלם.)

ב

	מספר מטבעות	ערך
חצי ₪	x	$0.5 \cdot x$
2 ₪	$13 - x$	$2 \cdot (13 - x)$

$0.5 \cdot x + 2 \cdot (13 - x) = 20$, $x = 4$. לאילן ארבעה מטבעות של חצי ₪ ותשעה מטבעות של 2 ₪.

59 המשתנה x מייצג את אורך המוט הקצר. $2 \cdot x - 6 = 3 \cdot (x - 6)$, $x = 12$.
אורך המוט הקצר הוא 12 ס"מ, אורך המוט הארוך הוא 24 ס"מ.

60 12. $2 \cdot x - 6 = 3 \cdot (x - 6)$, $x = 12$. המספר הוא 12.

61 את שתי השאלות אפשר לייצג על-ידי אותה משוואה. למשוואה אחת אפשר לכתוב "סיפורים" שונים.

62 נסמן ב- x את מספר הגולות שהיו למיכל. מספר הגולות שהיו לשירה הוא $2 \cdot x + 1$.

	לפני המשחק	לאחר המשחק
מיכל	x	$x + 2$
שירה	$2 \cdot x + 1$	$2 \cdot x + 1 - 2$

המשוואה לפי הנתונים היא $x + 2 = 2 \cdot x + 1 - 2 + 1$, ומתקבל $x = 2$. למיכל היו 2 גולות, לשירה היו 5 גולות.

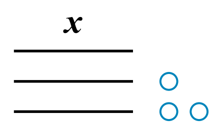
63 נסמן ב- x את מספר הנרשמים לחוג לאמנות. מספר התלמידים בחוג לצילום הוא $3 \cdot x$.
התלמידים שעזבו את החוג לצילום הצטרפו לחוג לאמנות. $3 \cdot x - 7 = x + 7 + 16$, $x = 15$.
לחוג לאומנות נרשמו 15 תלמידים, לחוג לצילום נרשמו 45 תלמידים.

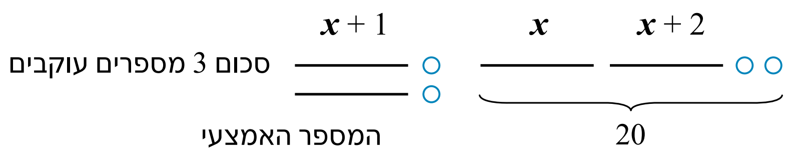
64 **ב** $270 - 5 \cdot x + 8 \cdot (20 - x) = 200 + 5 \cdot x - 8 \cdot (20 - x)$, $x = 15$.
לדניאל 15 הפסדים, לשמשון 5 הפסדים.

ב.3. סיכום

מגלים (עמ' 585)

שאלה א': ייצוג אפשרי





אפשר לפתור את השאלה על-ידי הסכמות (בלי משוואה).

<u>פתרון</u>: המספרים הם: 9, 10, 11.

<u>משוואה מתאימה</u>: $x + x + 1 + x + 2 - (x + 1) = 20$

<u>פתרון</u>: $x = 9$

הערה: לתלמידים שלא משתמשים בייצוג הנעלם יכול גם לייצג את המספר האמצעי.

נקבל את המשוואה: $x - 1 + x + x + 1 = 3x$. מכאן $2x = 20$.

שאלה ב':

x – מספר השבועות שיעברו עד שלרוחמה ולאורית אותו סכום כסף בקופות שלהן.

<u>ייצוג השאלה בטבלה</u>:

	סכום התחלתי	סכום לאחר x שבועות
רוחמה	10 ₪	$10 + 10 \cdot x$
אורית	28 ₪	$28 + 4 \cdot x$

<u>משוואה מתאימה</u>: $10 + 10 \cdot x = 28 + 4 \cdot x$

<u>פתרון</u>: $x = 3$. בעוד שלושה שבועות יהיה לשתיהן אותו סכום כסף. 40 ₪.

לומדים (עמ' 585)

סיכום השלבים לפתרון שאלות מילוליות.

בדוגמה שמובאת בהמשך מובאים כל השלבים. אפשר לקרוא את השאלה עם התלמידים. אין דרך נכונה אחת לקבוע נעלם. בדרך כלל קיימות מספר אפשרויות נכונות. חשוב לפתח ראייה גמישה של הפתרון אצל תלמידים, ולא להרגיל אותם לדרך מסוימת אחת. חשוב לתת תשובה מילולית לשאלה מילולית – תשובה שמשקפת את השאלה ומתאימה לנתונים. כמו-כן חשוב מאוד לבצע את שלב בדיקת התשובה שהתקבלה כשלב אינטגרלי של הפתרון.

משימות

אפשר לבצע את משימות 65 – 70 בעל-פה. תרגום ממלל לצורה מתמטית.

65 תשובה ד'.

66 תשובה ב'.

67 10 ס"מ ו- 18 ס"מ.

68 תשובה ג'.

69 תשובות ב' – ג' – ה'.

70 4 ס"מ ו- 12 ס"מ.

71 (1) ג (2) ב (3) א

72 21: $10 \cdot 2 \cdot x + x = 10 \cdot x + 2 \cdot x + 9$.

73 42: $10 \cdot 2 \cdot x + x = 10 \cdot x + 2 \cdot x + 18$.

74 3 ס"מ. הקושי במשימה הוא אורך הטקסט.

75 מחיר העט שישה שקלים. $3 \cdot x + 10 = 5 \cdot x - 2$.

76 12 בלונים. $15 \cdot x = 20 \cdot (x - 3)$.

77 שישה חברים. $20 \cdot x + 22.5 = 25 \cdot x - 7.5$.

78 דוגמה: על שני שולחנות מונחות ערמות ספרים, מספר הספרים בכל ערמה זהה. על השולחן הראשון 8 ערמות ועל השולחן השני 6 ערמות. מהשולחן הראשון מעבירים 7 ספרים לשולחן השני ומוציאים 2 ספרים פגומים. כעת יש אותו מספר ספרים על שני השולחנות. כמה ספרים היו בכל ערמה?

79 המספר הראשון 28, המספר השני 42. $3 \cdot x = 2 \cdot (70 - x)$.

80 המספר הראשון 20, המספר השני 40. $4 \cdot x = 2 \cdot (60 - x)$.

81 המספר הראשון 30, המספר השני 60. $4 \cdot x = 2 \cdot (90 - x)$.

82 לכל תרנגולת 2 רגליים, לכל ארנבת 4 רגליים. נסמן ב- x את מספר התרנגולות.
מספר הארנבות הוא $73 - x$. $2 \cdot x + 4 \cdot (73 - x) = 230$, $x = 31$.
מספר התרנגולות 31, מספר הארנבות 42.

מומלץ לבצע את משימות 83 – 85 בכיתה.

83 20 ₪. אפשר לפתור את השאלה בדרכים שונות. דוגמה: $4 \cdot 70 = 14 \cdot x$.

84 105 ₪. אפשר לפתור את השאלה בדרכים שונות. דוגמה: $14 \cdot 30 = 4 \cdot x$.

85 16 חברים. $60 \cdot x = 80 \cdot (x - 4)$

86 **א** 2 **ב** 22 ₪ **ג** 91 ₪. $3 \cdot 22 + 25$ או $5 \cdot 22 - 19$

87 המליצו לתלמידים לכתוב את הנתונים על סקיצה.
אורכי צלעות המשולש: 13 ס״מ, 14.5 ס״מ, 16.5 ס״מ. צלע הריבוע: 11 ס״מ. $3x + 5 = 4(x - 2)$

88 דוגמה: כדי לקנות 6 פרחים זהים חסרים לדבורה 2 ₪. אם היא תקנה 5 פרחים מאותו סוג, ייוותרו לה 3 ₪.
מהו המחיר של כל פרח?

89 **א** 45°, 135°, $x + 3 \cdot x = 180$, $x = 45^\circ$.
ב פי 5. (מידת הזווית הקטנה תהיה 30°, מידת הזווית הגדולה היא 150°).

90 **א** זוויות מתחלפות שוות, ולכן $x + 100 = 2 \cdot x + 60$. $x = 40^\circ$.
ב מידתה של כל זווית היא 140°.

ג. פתרון גרפי של משוואות

חלק זה של הפרק אינו חובה. על-פי תכנית הלימודים, אפשר להרחיב את נושא המשוואות לפתרון גרפי של משוואות.

<u>מגלים (עמ׳ 591)</u>

א

$$x - 4 = 6 + (-x) \quad | + x$$
$$x + x - 4 = 6 + (-x) \quad | + x$$
$$2 \cdot x - 4 = 6 \quad | + 4$$
$$2 \cdot x - 4 + 4 = 6 + 4$$
$$2 \cdot x = 10 \quad | :2$$
$$x = 5$$

ב הערך של כל אגף הוא 1.

ג צורת הגרפים היא פונקציה קווית. $f(x)$ היא פונקציה עולה, $g(x)$ היא פונקציה יורדת.
השיעורים של נקודת החיתוך הם $(5,1)$.

ד יש קשר. פתרון המשוואה הוא שיעור ה- x של נקודת החיתוך של שני הגרפים, וערכו של כל אגף במשוואה המקורית לאחר הצבה של הפתרון שווה לשיעור ה- y של נקודת החיתוך.

<u>הערות</u>: הקושי המרכזי הוא להבין את הקשר בין הפתרון האלגברי לבין הפתרון הגרפי של המשוואה. לצורך זה יש להדגיש את המשמעות של המושגים המתמטיים שבאים לידי ביטוי בנושא, ביניהם: פתרון המשוואה, ערך של אגף לאחר הצבת הפתרון במקום המשתנה, פונקציה, ערך של פונקציה וכדומה. המושגים הם מופשטים, והקשר בין הייצוגים איננו מידי. יש לדרג את הלמידה לצעדים שמתאימים לתלמידים.

לומדים (עמ' 591)

בשיעור מוצג הקשר בין משוואות לבין פונקציות. כל אגף מייצג פונקציה. בשלב הראשון חייבים לבחור את המשוואה המקורית (ולא משוואות שקולות מהמשך הפתרון).
השלב השני – סרטוט הפונקציות באותה מערכת הצירים ומציאת נקודת חיתוך.
השלב השלישי – מציאת פתרון המשוואה בשיעור ה- x של נקודת החיתוך.
שיעור ה- y של נקודת החיתוך הוא הערך של כל אחד מאגפי המשוואה המקורית לאחר הצבת ערך הפתרון במקום המשתנה החופשי.
הקישור בין הייצוג האלגברי של המשוואה לבין הייצוג הגרפי מעמיק את הבנת הנושא ובונה אינטואיציה מתמטית בנושא מופשט. זוהי הזדמנות לקשר בין שני נושאים ולהעמיק את ההבנה של כל נושא – נושא המשוואות ונושא השאלות המילוליות – ולכן יש להתעכב על לימוד הנושא ולוודא כי הובן היטב.

משימות

במשימות 91 ו- 93 סדר השאלות הוא הפוך: מפתרון המשוואה לנקודת חיתוך של פונקציות.
במשימה 92 ממציאת נקודת חיתוך לפתרון משוואה.

91 א $x = 3$

ג $x = 3$

ד פתרון המשוואה הוא שיעור ה- x של נקודת החיתוך.

ה $y = 1$. זה ערכו של כל אגף כאשר מציבים בו $x = 3$.

92 ב $x = -4$

ג $x = -4$. פתרון המשוואה הוא שיעור ה- x של נקודת החיתוך.
$y = -5$. זהו הערך של כל אגף כאשר מציבים בו $x = -4$.

93 א $x = 1$

ג $x = 1$

ד פתרון המשוואה הוא שיעור ה- x של נקודת החיתוך.
$y = 2$. זה ערכו של אגף שמאל כאשר מציבים בו $x = 1$.

94 א חזרה על מיומנויות הנלמדות בפרק פונקציות. כאשר המקדם של x בפונקציה הוא שלילי, מומלץ לכתוב בסוגריים את ערכי ה- x השליליים, כדי לא לטעות בחישוב.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-5	-2	1
$g(x)$	10	7	4	1

ב כן. כאשר $x = 2$, הערך של שתי הפונקציות שווה 1.

ג נקודת החיתוך היא $(2,1)$.

התלמידים לא פתרו את המשוואה ולא סרטטו גרפים.

95 א

x	-1	0	2	5	6
$f(x) = 2 \cdot x - 3$	-5	-3	1	7	9
$h(x) = x + 2$	1	2	4	7	8

ב–ג $x = 5$ ד פתרון המשוואה הוא שיעור ה- x של נקודת החיתוך.

96 קריאת גרפים המובילה לכתיבת משוואה. א $(1,3)$ ב $4 - x = 5 \cdot x - 2$

מיומנויות עמ' 593

בטבלה שבמיומנות הראשונה מובא סיכום של תרגום ממלל לביטוי אלגברי של סוגי השאלות שנלמדו בפרק זה ובפרקים הקודמים. המיומנות השנייה המובאת היא מיומנות של שלבי פתרון שאלה מילולית מסובכת יותר: "נתינה וקבלה", כלומר ניתוח הנתונים, בחירת הנעלם, תרגום הנתונים באמצעות הנעלם, בניית המשוואה המתאימה, פתירה לפי השלבים שנלמדו ובדיקה.

התלמידים צריכים להכיר שלבים אלו בעל-פה ולעבור משלב לשלב ללא היסוס.

פיצוחים

בדיקת הנלמד.

	ארגז קטן	ארגז גדול
מצב בהתחלה	x	$2 \cdot x$
	$x - 6$	$2 \cdot x - 6$

המשוואה: $2 \cdot x - 6 = 3 \cdot (x - 6)$, $x = 12$. בדיקה: $2 \cdot \mathbf{12} - 6 = 18$

$3 \cdot (\mathbf{12} - 6) = 18$

בארגז הקטן היו 12 תפוחים. בארגז הגדול היו 24 תפוחים.

מוכנים להמשיך? עמ' 595

1. ג 2. ב 3. ב 4. ג 5. ג 6. א 7. ג 8. ב 9. ג

תרגילים נוספים עמ' 596

99 א 2 ב 6 ג 1 ד 10 ה $\frac{4}{8}$ או $\frac{1}{2}$ ו 6 ז -12 ח 9 ט -81

100 א -1 ב -2 ג 0 ד -9 ה 5 ו 0 ז -4 ח -2.8 ט 8

101 א 31. $3 \cdot x + 82 = x + 144$. ב 90. $y + 30 + 50 = 70 + 100$.

102 א $x = 10$ ב $t = \frac{7}{5}$ ג $u = 3$ ד $z = 1$

103 א -7 ב -5 ג -1 ד 0

104 היקף המשולש: $10 + x$. היקף הטרפז: $3 \cdot x + 4$. ההיקפים שווים, $10 + x = 3 \cdot x + 4$, $x = 3$.

105 אפשר לבדוק בשאלה את המספרים. אם שרית היום בת 12, הרי רחל בת 34. בעוד 8 שנים תהיה שרית בת 20 ורחל תהיה בת 42. המספר 42 אינו גדול פי 2 מ- 20, ולכן המספר 12 אינו תשובה לשאלה. באופן דומה נראה שהמספר 14 כן מתאים.

106 בעוד 17 שנים. $(32 + x = 6 + x + 9 + x)$

107 לפני 4 שנים.

108 שירה בת 26. $x + 32 + 6 = 2 \cdot (x + 6)$.

109 א, ד, ה.

110 93; $10 \cdot 3 \cdot x + x = 10 \cdot x + 3 \cdot x + 54$.

111 (1) ד (2) ג (3) ה (4) א (5) ב

112 52 תלמידים. ב- 2000, 26 תלמידים. ב- 2001, 13 תלמידים.

ממשיכים בתרגול

עמ' 599

113 א היקף מלבן A: $2 \cdot (y + 4)$. היקף מלבן B: $2 \cdot (12 - y + 4)$.
לפי הנתון: $3 \cdot 2\ (y + 4) = 2 \cdot (12 - y + 4)$, $y = 1$. לכן מידות מלבן A הן: 4 ו-1.
ב מידות מלבן B הן: 4 ו- 11.

114 א אורך צלע הריבוע הוא 9 מ'. $4 \cdot y = 3 \cdot (21 - y)$
ב אורך צלע המשולש הוא 16 מ'. $3 \cdot x = 4 \cdot (28 - x)$

115 א הנעלם מייצג את הזמן של הרוכב המהיר. הרוכב המהיר רכב x שעות, הרוכב האיטי רכב שעה יותר ולכן רכב $x + 1$ שעות.

ב

	מהירות	זמן	דרך
רוכב מהיר	60	x	$60 \cdot x$
רוכב איטי	40	$x + 1$	$40 \cdot (x + 1)$

ג הדרך של שני הרוכבים שווה, $60 \cdot x = 40 \cdot (x + 1)$, $x = 2$. הרוכב המהיר רכב שעתיים, והרוכב האיטי 3 שעות.

ד המרחק בין הערים: 120 קמ"ש. $60 \cdot 2 = 120$ או $40 \cdot (2 + 1) = 120$.

116 אריאל קיבל 210 ₪. נסמן ב- x את סכום הכסף. לפי הנתונים, $x = \frac{x}{3} + 35 + \frac{x}{2}$. לפיכך $x = 210$.

117 כדי להראות שהיגד אינו נכון, מספיק להראות דוגמה אחת. כדי להראות שהיגד הוא נכון, דוגמה אחת אינה מספיקה, ויש צורך בהסבר או בהוכחה.

א נכון. אילו היו המספרים שווים, כל אחד מהם היה 10 $(30 : 3)$. מאחר שהם שונים, לפחות אחד חייב להיות גדול מ- 10, כדי שהסכום יהיה 30.

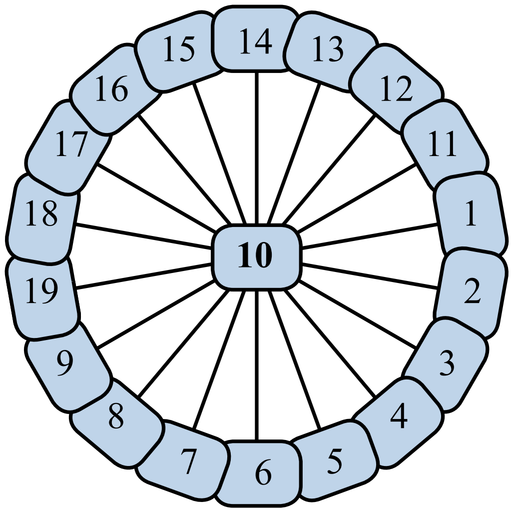
ב לא נכון. כדי לקבל סכום זוגי יכולים להיות שני מספרים אי-זוגיים (סכומם זוגי) ומספר אחד זוגי. לדוגמה: המספרים 1, 3, 26. יכולים להיות גם שלושה מספרים זוגיים. דוגמה: 2, 4, 24.

ג נכון. מאחר שהסכום זוגי, לא ייתכנו שלושה מספרים אי-זוגיים, כי סכומם אי-זוגי.

ד לא נכון. דוגמה: 1, 4, 25.

ה לא נכון. דוגמה: 1, 2, 27 . ההפרש $27 - 1 = 26$ אינו כפולה של 3.

118



119 שטח מלבן **B** הוא $5 \cdot x$. שטח מלבן **C** הוא $3 \cdot (x + 4)$. לפי הנתונים, $5 \cdot x = 3 \cdot (x + 4)$, $x = 6$.
האורך של x הוא 6 ס"מ. אפשר להציע לתלמידים לחשב את שטחי המלבנים לצורך בדיקה.
שטח מלבן **A** הוא $3 \cdot 6 = 18$. שטח מלבן **B** הוא $5 \cdot 6 = 30$. שטח מלבן **C** הוא $3 \cdot 10 = 30$.

120 הנעלם הוא רוחב המלבן.
$3 \cdot x = 1 \cdot (x + 5)$
הרוחב: 2.5 ס"מ.
מידות המלבן החדש הן 1 ס"מ ו- 7.5 ס"מ.

העמקה עמ' 602

1 באולם "דקל" 360 כיסאות. באולם "תמר" 120 כיסאות. נסמן ב- x את מספר הכיסאות באולם "תמר", לכן מספר הכיסאות באולם "דקל" הוא $3 \cdot x$. עשרה ילדים יצאו מאולם "דקל" ועברו לאולם "תמר" בו רק מחצית מהמקומות היו תפוסים. $3 \cdot x - 10 = 5 \cdot (\frac{x}{2} + 10)$. $x = 120$.

2 במגרש הכדורגל היו 100 ילדים, במגרש הכדורסל 50 ילדים. נסמן ב- x את מספר הילדים במגרש הכדורסל, לכן מספר הילדים במגרש הכדורגל הוא $2 \cdot x$. לאחר שהגיעו ילדים נוספים לכל מגרש, וילדים עברו ממגרש אחד לשני, מתקבלת המשוואה: $2 \cdot x + 6 - 10 = 1.5 \cdot (x + 4 + 10)$, $x = 50$.

3 **א** היקף המלבן הוא $2 \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot (6 - x)$. לאחר פישוט הביטוי מתקבל הביטוי $24 - 2 \cdot x$.

ב כדי שהמלבן יהיה ריבוע, כל צלעותיו צריכות להיות שוות. (מספיק להשוות בין הצלעות הסמוכות. הצלעות הנגדיות שוות במלבן.) לכן $x = 2 \cdot (6 - x)$, $x = 4$. כלומר כאשר x שווה ל- 4 יחידות, המלבן הוא ריבוע.

משוואות מיוחדות

מגלים (עמ' 603)

1 בסעיפים א' ו- ב' תלמידים חזקים יכולים לראות שלמשוואה הנתונה יש אין-סוף פתרונות, כי כל תלמיד יכול לבחור מספרים אחרים. ההסבר לכך טמון בסעיף ב': הביטויים בשני האגפים שקולים.
סעיף ד' הוא המסקנה של הסעיפים ב' ו- ג'.

2 התלמידים יכולים להגיע למסקנה שלמשוואה אין פתרון, בלי לפתור אותה עד הסוף.

$$18 \cdot x - 10 = 6 \cdot (3 \cdot x - 2) + 5$$
$$18 \cdot x - 10 = 18 \cdot x - 12 + 5$$
$$18 \cdot x - 10 = 18 \cdot x - 7$$

10 שונה מ- 7, לכן אין פתרון

לומדים (עמ' 603)

הנושא, שאינו במפורש בתכנית הלימודים, מיועד לתלמידים מתקדמים. הוא משלים את החקירה של משוואה ממעלה ראשונה. אין כאן הוכחה פורמלית, אלא רק דוגמאות, אך אפשר להגיע עם התלמידים לניסוח מסקנות כמו אלה שלהלן.

- כאשר לאחר כינוס איברים מקבלים משוואה מהסוג $a \cdot x + b = a \cdot x + d$ (מקדמי ה- x בשני האגפים שווים), מקבלים משוואה מיוחדת.
- אם גם האיברים החופשיים שווים $(b = d)$, מקבלים את המשוואה $a \cdot x + b = a \cdot x + b$, שהיא זהות הנכונה לכל x, לכן יש למשוואה אין-סוף פתרונות. (אפשר גם לומר שמקבלים משוואה מהסוג $0 \cdot x = 0$.)
- אם האיברים החופשיים שונים $(b \neq d)$, מתקבלת לאחר צמצום המשוואה $0 \cdot x = d - b$.

ההפרש $b - d$ שונה מ- 0, לכן אין ערך של x שהשוויון מתקיים בו, לפיכך למשוואה אין פתרון.

משימות

במשימות 5 – 8 מגיעים בסוף התהליך של פתרון משוואה למשוואות מהסוג $a \cdot x = b$.
כאשר $a \neq 0$, יש למשוואה פתרון אחד בלבד, שהוא $\frac{b}{a}$. התלמידים נוטים לחשוב בטעות שהמקרה $b = 0$ הוא מקרה מיוחד, ובמקרה זה פתרון המשוואה הוא 0. (כאמור, כאשר $a = 0$ ישנן שתי אפשרויות: כאשר גם $b = 0$, יש אין-סוף פתרונות; וכאשר $b \neq 0$ אין פתרון.)

5 **א** אין פתרון. **ב** אין-סוף פתרונות. **ג** 0 **ד** 10 **ה–ח** 0

6 **א** אין-סוף פתרונות. **ג–ה** פתרון אחד. **ו** אין פתרון. **ז–ח** פתרון אחד.

7 לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים נקבל מכל אחת מהמשוואות משוואה שהמקדם של x שבה הוא 0, והאיבר החופשי שונה מ- 0.

8 לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים נקבל מכל אחת מהמשוואות משוואה שהמקדם של x שבה הוא 0, וגם האיבר החופשי הוא 0.

9 א' ו- ג' – אין פתרונות. ב' ו- ה' – אין-סוף פתרונות. ד' ו- ו' – פתרון אחד.

10 הסבר אפשרי: המשוואה היא מהסוג $A = B$. המשמעות של שוויון ביטויים היא ש**בכל** הצבה הערכים של A ושל B שווים. דוגמה: $4 \cdot x = 6 \cdot (x + 2) - 2 \cdot (x + 6)$.

11 **א** – 2, **ב** – 1.

12 התלמידים יכולים להשתמש בדגם המשוואות שבמשימה 8 או לכתוב תכונות של המספרים.
דוגמאות:
$5 \cdot x + 3 = 6 \cdot x - (x - 3)$ $\quad$ $4 \cdot (y - 1) + 5 = y + 1 + 3 \cdot y$ $\quad$ $y \cdot (7 + 3) = 10 \cdot y$

13 התלמידים יכולים להשתמש בדגם המשוואות שבמשימה 8.
$5 \cdot x + 3 = 6 \cdot x - (x - 5)$ $\quad$ $4 \cdot (y - 1) + 4 = y + 1 + 3 \cdot y$