

10. פונקציות

רקע

הנושא פונקציות הוא נושא חדש בהוראת המתמטיקה בכיתה ז’. המיומנויות הקשורות להתמצאות במערכת צירים הן בסיס ללימוד הגרפים והפונקציות. תלמידים שלמדו את הנושא בבית הספר היסודי, כשלמדו סימטריה והזזה או לצורך פיתוח מיומנות העתקה.

התלמידים למדו את החוקיות המובילה למושגים של קשר, קשר קבוע, משתנה ומכאן לביטויים אלגבריים. הם גם למדו לפתור משוואות ואי-שוויונות ולהיעזר בהם לפתירת שאלות מילוליות. הנושא “פונקציות” הוא היבט נוסף של האלגברה, מאחד ומשתמש בכל מה שהתלמידים למדו עד כה דרך הייצוגים השונים שלו.

בתאוריה, קשרים הם לאו דווקא קשרים בין מספרים, אך לפי תכנית הלימודים נעסוק בפרק רק בקשרים מספריים ובפונקציות מספריות.

אחד מהמאפיינים של המושג קשר – ומכאן של פונקציה – הוא ריבוי הייצוגים האפשריים. מבחינים בשישה ייצוגים של קשרים: ייצוג מילולי, ייצוג על-ידי טבלאות, ייצוג על-ידי זוגות סדורים, ייצוג גרפי (מערכת צירים), ייצוג על-ידי חצים וייצוג על-ידי ביטוי אלגברי.

ארבעת הייצוגים האחרונים אינם מוכרים לתלמידים.

לפי תכנית הלימודים בסוף פרק 8 (כפל וחילוק של מספרים מכוונים) נחשפו התלמידים למערכת צירים כיישום של מספרים מכוונים. הם רכשו את אחת מהמיומנויות הבסיסיות לקריאה ולבנייה של גרף: קריאת נקודות וסימון נקודות במערכת צירים.

השיעורים הראשונים בפרק זה מוקדשים לרכישת המיומנויות האחרות הקשורות לייצוגים החדשים:

- קריאת נתונים מתוך אוסף של נקודות “בודדות” או מתוך גרף רציף;
- הבנת הנתונים המתוארים בגרף;
- מעבר מייצוג מילולי לייצוג גרפי, הכולל בחירה נכונה של המשתנה החופשי ושל המשתנה התלוי ובניית הגרף.

נוסף על המיומנויות הקשורות לייצוג של קשר כלשהו, התלמידים נדרשים לדעת לזהות פונקציה בייצוגים שונים שלה.

פונקציה היא סוג של קשר בין שני גדלים. ברוב המקרים הערכים של אחד מהגדלים משפיעים על הערכים של הגודל האחר, לכן המושגים הבסיסיים בהוראת הנושא הם *משתנה חופשי* (המשפיע) ו*משתנה תלוי* (המושפע).

משתנה y הוא פונקציה של המשתנה x , לכל ערך של x מתאים ערך אחד ויחיד של y .

הייצוג על-ידי חצים – שאינו דרישה מפורשת בתכנית – חשוב, כי הוא מאפשר להבין את המושג של פונקציות (מול קשר שאינו פונקציה מבחינה חזותית).

מושגים נוספים הקשורים לנושא:

תחום – קבוצת הערכים של המשתנה החופשי שהפונקציה מוגדרת בהם;

טווח – קבוצת הערכים של המשתנה התלוי, המתאימים לערכים של התחום.

בהתחלה התלמידים מתבקשים להבין את הגדרת המונחים האלה. השימוש בהם מוגבל לחקירת השתנות.

אנו מלמדים ייצוג על-ידי ביטוי אלגברי של פונקציות בלבד (ולא של קשר כלשהו). יש להקפיד על המעבר מביטוי אלגברי לייצוגים האחרים (טבלה, זוגות סדורים, גרף...) ומהייצוגים האחרים אליו.

בפרק מוקדש זמן רב לפיתוח מיומנויות הקשורות לסרטוט גרפים, בלי לזוטר על העבודה בפועל. יש בנספח כמה גרפים מוכנים כדי לקצר את הזמן הדרוש לביצוע המשימות.

אחד הקשיים של התלמידים הוא השימוש בשתי הצורות של כתיבת הפונקציה: $f(x) = y$ ו- $y = f(x)$.

הביטוי $f(x) = \dots$, כגון $f(x) = 3 \cdot x$, שבו יש רק משתנה אחד, מתייחס לפונקציה באופן כללי בלי קשר מיוחד לאחד מהייצוגים. כמו-כן ביטוי זה נותן שם לפונקציה, מה שמאפשר הבחנה בין פונקציות שונות.

הביטוי $y = \dots$, כגון $y = 3 \cdot x$, שבו יש שני משתנים, מתייחס לייצוג הגרפי של הפונקציות ומציין שלכל x (הציר האופקי) יש ערך y (הציר האנכי) המתאים לו.

השאלות הראשונות הקשורות לחקירת פונקציות:

- מה הם המשתנים?
- מהו הקשר? האם יש תלות?
- מי הוא המשתנה התלוי?
- פונקציה? לא פונקציה?
- האם מחברים בין נקודות הגרף?

בשלב שני מאפיינים פונקציה על-ידי מושג ההשתנות:

- ההשתנות קבועה או לא קבועה?
- פונקציה עולה, יורדת או קבועה?

ההבחנה בין פונקציה בעלת השתנות קבועה לבין פונקציה בעלת השתנות בלתי-קבועה מובילה בכיתה ח' לפונקציה הקווית.

בהמשך הלימודים יהיה נושא הפונקציה אחד מהנושאים המרכזיים שהתלמידים ילמדו.

מושגים ומונחים

מערכת צירים, ציר אופקי, ציר אנכי, שיעורי הנקודה, זוג סדור, רבעים במערכת צירים, משתנה חופשי, משתנה תלוי, גרף, גרף רציף, גרף נקודתי, טבלת ערכים, פונקציה, תחום, טווח, ביטוי אלגברי של פונקציה, השתנות קבועה, השתנות בלתי-קבועה, פונקציה עולה, פונקציה יורדת, פונקציה קבועה.

ציוד

דפי נספח.

לוח מחיק, דפים שיש בהם צירי מספרים.

מטרות

התלמידים ידעו:

- א** למצוא נקודות במערכת צירים;
- ב** לסמן נקודות במערכת צירים;
- ג** להכיר את התכונות של ארבעת הרבעים במערכת הצירים, הקשורות לסימון המשתנים;
- ד** לקרוא ולהבין גרף;
- ה** להוציא נתונים מגרף;
- ו** לתאר תופעה המוצגת בגרף;
- ז** לבנות גרף לפי תיאור מילולי;
- ח** לבנות גרף לפי טבלת נתונים;
- ט** לבנות גרף לפי רשימת זוגות סדורים;
- י** לזהות פונקציה בייצוגים שונים;
- יא** להכיר ייצוג אלגברי של פונקציה ולהשתמש בשתי צורות הכתיבה שלו;
- יב** לעבור מייצוג אלגברי של פונקציה לייצוגים אחרים של פונקציה ולהפך;
- יג** להבחין בין פונקציה בעלת השתנות קבועה לבין פונקציה בעלת השתנות בלתי-קבועה בייצוגים שונים של פונקציה;
- יד** להגדיר קטעים בהם פונקציה עולה, יורדת או קבועה בייצוגים שונים של פונקציה.

מבנה הפרק

מדור א. מערכות צירים

- א. 1** מערכת צירים – זוגות סדורים ושיעורים
- א. 2** מערכת צירים שלמה

מדור ב. גרפים

- ב. 1** קריאת גרף
- ב. 2** בניית גרף
- ב. 3** קשר בין משתנים

מדור ג. פונקציה

- ג. 1** זיהוי של פונקציה
- ג. 2** ייצוגים שונים של פונקציות

מדור ד. השתנות של פונקציה

- ד. 1** השתנות
- ד. 2** פונקציה עולה ופונקציה יורדת

הערה: החומר חדש, לכן מומלץ דיון ברבות מהמשימות. נוסף על כך, רוב המשימות בפרק מורכבות ממספר רב של סעיפים כדי "לנצל" את מרב המידע המוצג בגרף. (יש להקדיש בערך עשר דקות לכל משימה.) חשוב להתחשב בנתונים אלה בתכנון זמן ההוראה. מומלץ להקדיש לפרק כ- 15 שעות.

השיעור בספר הלימוד

מגלים ולומדים עמ' 507



א. מערכות צירים

א.1. זוגות סדורים ושיעורים

כאמור, בתכנית הלימודים מערכת הצירים מוצגת כיישום של מספרים מכוונים. הוחלט למקם את הנושא בסוף פרק זה, ולא בסוף הפרק הקודם משתי סיבות:

- א כדי לא להפסיק את הוראת הפעולות במספרים מכוונים;
- ב כדי לקרב את הנושא לנושא פונקציות (פרק 10). המיומנויות הקשורות להתמצאות במערכת צירים הן בסיס ללימוד הגרפים והפונקציות. יש תלמידים שלמדו את הנושא בבית הספר היסודי כשלמדו סימטריה והזזה או לצורך פיתוח מיומנות העתקה.

מגלים (עמ' 507)



מערכת הרחובות והשדרות של מנהטן מאפשרת לתלמידים לגלות דרך לסימון מיקום של נקודה מסוימת במישור. בשלב הראשון מבינים שבשל הצורך למצוא נקודת מפגש במערכת, שהרחובות בה מאונכים לשדרות, בונים מערכת צירים. בשלב השני מחפשים דרך להתמצאות בתוך מערכת הרחובות. במילים אחרות, נדרש הסכם מקובל לסימון מיקום של נקודה. יש לתת לתלמידים זמן לצייר את מערכת הרחובות כדי שיתנסו בבנייה זו.

לומדים (עמ' 507)



התלמידים לומדים את המושג מערכת צירים. ציר ה- x מאוזן, וציר ה- y מאונך. השמות של צירים אינם שגרתיים (שם הציר נקרא על-פי המשתנה המיוצג על-ידיו), והם ילוו את התלמידים במשך שנים, לכן מומלץ להסביר

- א ששמות הצירים הם הסכם;
- ב שלפעמים שם הציר הוא שם הגודל שמיוצג בו, לדוגמה "ציר הזמן".

נקודת המפגש של שני הצירים נקראת ראשית הצירים. יש לוודא שכולם מבינים במה מדובר ושכולם רואים את חשיבות הרווח השווה בין השנתות על כל ציר.

יש צורך לוודא שכולם מבינים את התפקיד של כל ציר בקביעת שיעורי נקודה ובניית הזוג הסדור המסמן את מקום הנקודה במערכת הצירים. אף-על-פי שחלק מהתלמידים מכירים את מערכת הצירים, יש לחזור ולוודא שכל המושגים והסימונים מובנים. סדר השיעורים בזוג סדור מהווה קושי לחלק מהתלמידים, לכן יש להדגיש את תוצאת החלפת מקום השיעורים.

משימות



תרגילים 1 – 3 הם תרגילי יישום של רישום שיעורי נקודות מסומנות ושל סימון נקודות במערכת צירים כאשר השיעורים נתונים. כל הנקודות הן ברביע הראשון.

1 א 5 ב 8 ג $A(1,1)$ $C(4,1)$ $D(5,8)$ $E(9,3)$ $F(9,5)$

ד בנקודה C היא החליפה בין שיעורי x ו-y, בנקודה D יש לה טעות בשיעור y, בנקודה M שני השיעורים שגויים;

ה M ו-F, $x = 9$ ו-A ו-C, $y = 1$ ז שיעור ה-x שונה, שיעור ה-y שווה.

2 פיתוח מיומנות בניית מערכת צירים ומקום נקודות לפי שיעוריהן.

3 א D ב D, C ג $B(4,4)$, $D(6,6)$, $G(8,8)$ ד F

ה H ו-A, B, C, H ז A, B, H, F

משימות



4 א $A(7,6)$ $B(9,0)$ $C(4,9)$ ב H ו-C, $x = 4$, $y = 4$: M ג $B : y = 0$, $T : x = 0$

ד כן ה כן ו לא

5 א $K(0,10)$ $E(4,10)$ $C(4,1)$ $B(7,1)$ $A(7,6)$ ג $D(4,6)$ ד $G(0,1)$

6 סימון בנספח.

7 א יש אפשרויות רבות, אך כולן על אנך לציר ה-x העובר בנקודה $(7,0)$ שעליו.

ב יש אפשרויות רבות, וכולן על ישר המקביל לציר ה-x העובר בנקודה $(0,3)$.

ג כולן על ציר ה-y. ד כולן על ציר ה-x.

8 א מלבן. ב ריבוע.

א.2. מערכת צירים שלמה

מגלים (עמ' 510)



מטרת הפעילות היא לגלות את עקרון הרחבת הצירים למספרים מכוונים. צורה ב' מתקבלת מצורה א' על-ידי שיקופה ביחס לציר ה-y, ובעצם מרחיבים את ציר ה-x. לא כדאי להיכנס לפרטי הציור ואיך הוא נעשה (קטעים המחברים נקודות על הצירים $(1,0)$ ו- $(0,7)$; $(2,0)$ ו- $(0,7)$...), אלא אם כן יש זמן. צורה ג' מתקבלת מצורה ב' על-ידי שיקופה ביחס לציר ה-x, ובעצם מרחיבים את ציר ה-y.

לומדים (עמ' 510)



הרחבת מערכת הצירים למספרים מכוונים נעשית לפי העיקרון שאפשר להרחיב את ציר המספרים למספרים שליליים, וזאת בשני הכיוונים: המאורך והמאוזן.

התלמידים לומדים כי מערכת צירים בנויה משני צירים המאונכים זה לזה ויוצרים ארבעה רביעים. יש להדגיש את מקומו של כל רביע. (המספור הוא נגד כיוון השעון). על-פי מיקום המספרים 0 ו-1 על כל אחד מהצירים קובעים את אורך קטעי היחידה. הנקודות שעל הצירים אינן שייכות לאף רביע. התלמידים יתרגלו באיזה רביע נמצאות נקודות שונות לפי השיעורים שלהן. ברביע הראשון שני השיעורים חיוביים. ברביע השני שיעור ה- x שלילי ושיעור ה- y חיובי. ברביע השלישי שני השיעורים שליליים. ברביע הרביעי, שיעור ה- x חיובי ושיעור ה- y שלילי. יש להדגיש את נקודת ראשית הצירים $(0,0)$ שהיא משותפת לשני הצירים, וממנה יוצאות הקרניים לארבעה כיוונים. הקושי העיקרי בנושא הוא כיוון המספור על כל אחת מהקרניים. הגדלים (הערכים המוחלטים) של השיעורים גדלים על כל קרן מהנקודה $(0,0)$. יש תלמידים הנוטים בטעות להתחיל את המספור משמאל או מלמטה.

משימות



- 9 א הנקודות ברביע הראשון: D, C. ב הנקודה ברביע השני: A. ג הנקודות ברביע השלישי: H, G. ד הנקודות ברביע הרביעי: F, E. ה על ציר ה- x : הנקודה I. על ציר ה- y : הנקודה B.
- A(4,4) B(7,7) C(7,-2) E(6,-5) M(-3,0)
- 10 לא. כל נקודה יכולה להיות רק ברביע אחד.
- 11 A(4,4), B(7,7), C(7,-2), D(-2,3), E(6,-5), M(-3,0)
- 12 א הראשון. ב שלילי. ג שיעור ה- y חיובי. ד הרביעי.
- 13 ציור של כלב.
- 15 א 4
- ב ברביע השני שיעור ה- x של כל הנקודות הוא שלילי, ושיעור ה- y חיובי. ברביע השלישי- שני השיעורים שליליים. ברביע הרביעי- שיעור ה- x חיובי ושיעור ה- y שלילי.
- ג 3 ד רביע שני או שלישי. ה רביע שלישי.
- 16 מומלץ לפתור את המשימה בעל-פה.
- 17 א 0 ב 0 ג ציר ה- y . ד ציר ה- x .
- 18 B(5,3); D(-2,-2) הוא ההפך D(5,3); B(-2,-2).

ב. גרפים

ב.1. קריאת גרף

מגלים (עמ' 514)



- התלמידים מקבלים לראשונה תיאור של תופעה המיוצגת על-ידי גרף במערכת הצירים. מטרת הפעילויות היא לעורר את תשומת לבם של התלמידים למרכיבים של קריאת גרף ולפירושיהם. הפעם הפעילות לא מכוונת לגילוי צורך או עובדות, אלא לפיתוח מיומנות. לכן מומלץ לבצע אותה במליאה ולשאול כל פעם תלמיד אחר.
- **שמות הצירים:** השמות מציינים את הגודל ואת היחידה המיוצגים על-ידי כל ציר. בפעילות שבספר על ציר ה- x מיוצג הזמן (הגודל) בשעות (היחידה), ועל ציר ה- y מיוצגת הטמפרטורה במעלות.
 - **משמעות שיעורי נקודה על הגרף:** ההתמצאות במערכת הצירים הפעם אינה מציאת נקודות על-פי שיעוריהן, אלא מציאת נקודות על-פי תיאור מילולי, למשל: איזו נקודה מתארת את הטמפרטורה הגבוהה ביותר? באיזו שעה הייתה הטמפרטורה 5 מעלות?
 - **המשמעות של חיבור הנקודות בקו:** החיבור בקו מאפשר לתאר את השתנות הטמפרטורה ברצף, ולא רק באופן נקודתי. הייצוג הגרפי נותן לקורא תמונה שלמה של השתנות הטמפרטורה באותו יום. התלמידים מזהים בייצוג הגרפי מתי הטמפרטורה עולה ומתי היא יורדת.

לומדים (עמ' 515)



התלמידים לומדים שאפשר לייצג גדלים או משתנים בדרך חזותית באמצעות גרף. אפשר לייצג נתונים בקו רציף, בקטעים בלתי-רציפים או בנקודות “בודדות”. קו המחבר בין נקודות מאפשר למצוא נתונים שאינם כתובים במפורש. למשל, אפשר לדעת את הטמפרטורה לאורך כל היום כאשר הטמפרטורה נתונה בשעות עגולות. כמו-כן הקו מאפשר לראות את השינוי בטמפרטורה. היתרונות של הייצוג הגרפי הם שאפשר למצוא בצורה מהירה ובדרך חזותית עובדות בודדות, תיאור תופעות והשתנות תופעות לאורך זמן. מאוחר יותר נראה שאם יינתנו מספר גרפים על אותה מערכת צירים, נוכל גם להשוות בין תופעות שונות. חשוב להדגיש לתלמידים שעליהם לבדוק היטב מה מייצג כל אחד מקטעי היחידה, לפני שהם מפרשים את הגרף. יש לוודא שהתלמידים מבינים את המשמעות של חיבור הנקודות על-ידי קו, מה אפשר ללמוד על הקו העובר בין הנקודות (עולה, יורד, קבוע ועוד), ומה אפשר ללמוד על הנקודות שעל הקו שלא ניתן להן מידע מפורש. כמובן, התלמידים ילמדו בהמשך על התכונות של הקו ועל השתנותו ביתר העמקה.

משימות



- 19 מומלץ לבצע את המשימה בעל-פה. הגרף הנתון הוא דוגמה של נתונים המתוארים על-ידי הנקודות ה“בודדות”. תלמידים צריכים לזהות נקודה ששיעוריה מתאימים לנתון במלל.
פנינה $A(10,1.1)$, אסף $B(17,1.9)$, יואל $C(40,1.85)$, יהודית $D(60,1.6)$, יצחק $E(65,1.8)$, תהילה $F(90,1.6)$.
- 20 מומלץ לבצע את המשימה בעל-פה. מאפייני הגרף: התחלת המספור בציר האופקי אינה בנקודת ה-0; גרף רציף, וכל הנתונים בו מופיעים על הגרף (שמות ערים, שמות הצירים, יחידות). על התלמידים לענות על השאלות בעזרת קריאת הגרף.

- א** השעה בה יצאה המשאית מירושלים.
- ב** בשעה 7^{00} הייתה המשאית בירושלים.
- ג** 260 ק"מ.
- ד** קריאת שיעור של נקודה על ציר הזמן. 17^{00} .
- ה** בשעה 9^{00} הייתה המשאית במרחק 160 ק"מ מירושלים.
- ו** התלמידים אמורים להכיר את המושג של "מהירות". זו הזדמנות להסביר את המושג במילים פשוטות (מספר קילומטרים שעוברים בשעה). המשאית נסעה בשעתיים 160 ק"מ, ולכן מהירותה 80 קמ"ש (2 : 160).
- ז** תלמידים יכולים לתת תשובות שונות שחלקן מתייחסות רק לגרף, למשל: "בין השעה 9^{00} ל- 9^{30} המשאית עמדה", או תשובות המתייחסות לסיפור, למשל: "הפסקת קפה", "פקק ענק" ועוד.
- ח** דוגמה: המשאית יצאה מירושלים בשעה 7^{00} , לאחר שנסעה שעתיים 160 ק"מ, עצרה המשאית למשך חצי שעה, לאחר מכן המשיכה בנסיעתה במשך שעה וחצי ועברה 80 ק"מ, ולבסוף הגיעה לחיפה. בחיפה עצרה למשך 3 שעות, ואחר-כך חזרה לירושלים, לשם הגיעה בשעה 17^{00} . אפשר לקבל ניסוחים שונים. בכל ניסוח אמורה להיות התייחסות לנקודות המפנה בגרף: יציאה, נסיעה, עצירה, זמנים, מרחקים. הדרישה לתיאור של גרף נתון באופן מילולי מחייבת את התלמיד לשים לב לכל הפרטים.
- ט** קטע DE.
- י** 3 שעות.

לומדים (עמ' 517)



תוספת לקריאת גרף: קל לתלמידים לראות שהגרף עולה או יורד, קשה הרבה יותר לפרש את העלייה או את הירידה לפי המשתנים. בתיאור נסיעה כמו במשימה 2 יהיו תלמידים שיפרשו ירידה בגרף כמו "הכביש יורד" במקום "דרך חזרה".

הערה: בקריאת הגרף עלייה וירידה נקבעות משמאל לימין (ערכים עולים של המשתנה החופשי).

משימות



- 21** מומלץ להקדים את המשימה בהסבר קטן על משמעות המרת מטבעות. שיעור ה- y של נקודה מתאר כמה שקלים מקבלים תמורת דולר אחד ביום מסוים (שיעור ה- x של הנקודה). מאפייני הגרף: הגרף רציף אף-על-פי ששיעורי ה- x בדידים; רציפות הגרף מתארת את השתנות ערך הדולר בין תאריכים; ערכי ה- y הינם מספרים עשרוניים.
- א** 3.52 ₪ **ב** 3.56 ₪ **ג** ב- 17.8 וב- 5.9 **ד** 25.7 **ה** 31.8
- 22** מומלץ לבצע את המשימה בעל-פה. מאפייני הגרף: הגרף רציף; ערכי המשתנים הם מספרים מכוונים.
- א** כן **ב** $(-1, 1)$ **ג** $(1, -2)$ **ד** $-1 < x < 1$ **ה** -2
- ו** 1 **ז** $x = 1, x = 2.5$ **ח** $x = 0.5, x = 1.5$
- סעיפים ט'-י' מתייחסים לחיתוך הגרף עם הצירים. יש תלמידים המתקשים לקרוא נתונים אלה.
- ט** 2, 0, -2. **י** הגרף עובר דרך הנקודה $(0, 0)$. רק תשובה אחת בניגוד לסעיף הקודם.

23 מאפייני הגרפים: גרפים רציפים (הקווקוו בגרף נועד להקל את ההבחנה בין הגרפים).

א יש תלמידים שיגלו את הקשר בין השיעורים. לדוגמה, כאשר ערך ה- x גדול ב-2, ערך ה- y גדול ב-1 (הקו הישר מתאים לפונקציה $y = 0.5 \cdot x + 6$).

x	-8	-4	-2	0	2	4	6
y	2	4	5	6	7	8	9

ב

x	-7	-5	-4	-2	0	6
y	1	5	6	8	10	9

ג $-1.5, 6$ ד $(6,9)$ $(-6,3)$ ה $-6 < x < 9$

24 השאלות הרבות והשונות עוזרות ”לקרוא“ מידע רב בגרף ביתר קלות.

מאפייני הגרפים: גרפים רציפים (הקווקוו מיועד להקל את ההבחנה בין הגרפים); שני הגרפים מתארים תופעות המתרחשות בו-זמנית; תחילת הקו המקווקו אינה בראשית הצירים.

א 60 ק”מ ב 6^{00} ג 6^{30} ד 9^{15} ה 9^{15}

ו $8^{00} - 8^{15}$, במרחק 20 ק”מ מתל-אביב. ז $7^{00} - 7^{15}$, במרחק 40 ק”מ מירושלים.

ח הקבוצות ינחו באותו מקום במרחק 20 ק”מ מתל-אביב ו- 40 ק”מ מירושלים, אך לא באותה שעה.

ט בשעה 7^{40} במרחק 32.5 ק”מ מירושלים ו- 27.5 ק”מ מתל-אביב.

י במרחק 20 ק”מ מתל-אביב, שעה לאחר היציאה לדרך יא 20 ק”מ, במשך שעה.

יב 20 ק”מ לשעה. התלמידים יכולים לספור ארבע משבצות במאוזן (שעה) ולראות שחברי הקבוצה עברו 20 ק”מ בשעה.

25 מומלץ לבצע את המשימה בעל-פה. מאפייני הגרף: הגרף רציף (הנקודות עוזרות בקריאת הגרף);

היחידות, שניות ומטרים, שגרתיות פחות.

א 20 מ’, 40 מ’. ב 55 שניות. ג 80 מ’. ד 65 שניות. ה 25 שניות.

2. בניית גרף

מגלים (עמ' 521)



כאן מודגשים שניים מהשלבים של בניית גרף על-ידי ניתוח גרפים נתונים. אם יש זמן, עדיף שהתלמידים יסרטטו את הגרף המתאים לנתונים שבטבלה, וכדאי לדון בגרפים שיסרטטו. אם לא דנים בגרפים הנתונים, מומלץ למקד את הדיון במרכיבים של בניית גרף.

- מה מייצג כל ציר? סימון שם הגודל המיוצג;
- קביעת קטעי היחידה על כל אחד מהצירים – מרווחי השנתות על כל ציר יכולים להיות שונים בהתאם לנתונים ולתופעה המתוארת, אך על כל ציר קטעי היחידה שווים;
- סימון הנקודות המתאימות לנתונים;
- החלטה: האם מחברים בין הנקודות או לא?

לומדים (עמ' 522)



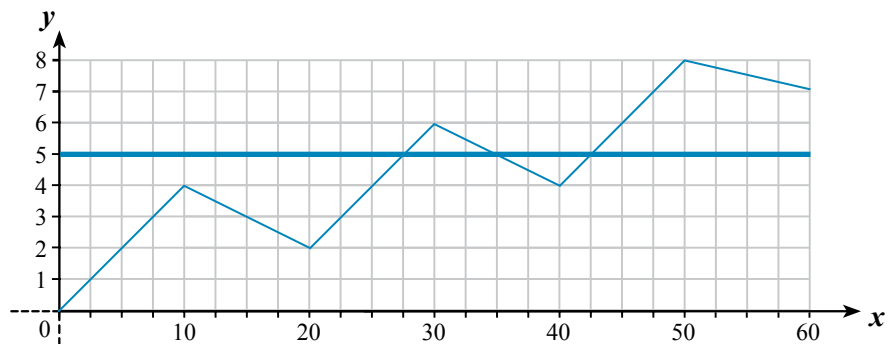
- בשיעור שלושה חלקים:
- מיומנות סימון נקודה על מערכת צירים;
 - ציון ייצוגים שונים של נתונים (תלמידים “נמשכים” לגרף, כי הוא ייצוג חזותי, אך חשוב שיבינו שכדי לצייר גרף צריך מקור לנתונים);
 - משמעות רציפות או אי-רציפות של גרף. בסוגיה א.1. מדובר בקיום הגרפים, והרציפות תלויה בגדלים המתוארים: אין לחבר בין הנקודות כאשר ערכי אחד מהגדלים הם מספרים שלמים (בני אדם, חיות, חפצים). אפשר לחבר בין הנקודות כאשר ערכי הגדלים הם רציפים: (מספרים, זמן, אורך, שטח, נפח וכדומה).

משימות



בתרגילים 9 – 16 התלמידים מסרטטים גרף על-פי נתונים המופיעים בטבלה, ועל-פי תיאור מילולי. מומלץ לבצע בכיתה לפחות שלוש מהמשימות.

26 א דוגמה של גרף. התלמידים צריכים לבחור את אורכי היחידות בכל ציר ולבנות את הנקודות.

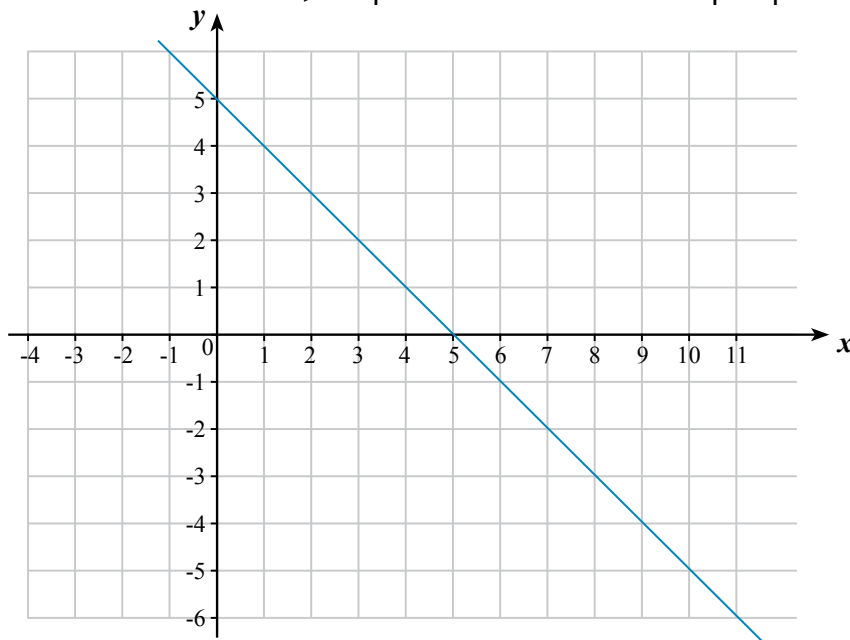


ב הנטייה של התלמידים היא לענות 35 לפי הטבלה. בניית הגרף ויצירת הישר $y = 5$ (גם אם הם לא מכירים את המושג בצורה פורמלית) מובילה אותם למציאת אפשרויות נוספות (סעיף ד'). $(27.5, 5)$ ו- $(42.5, 5)$.

ג (15,3)

ד זו הזדמנות להראות את יתרון הגרף על הטבלה. בטבלה קשה לראות את החוקיות. בגרף מובלטות “מדרגות נטויות” בגובה 4 יחידות וברוחב 20 יחידות.

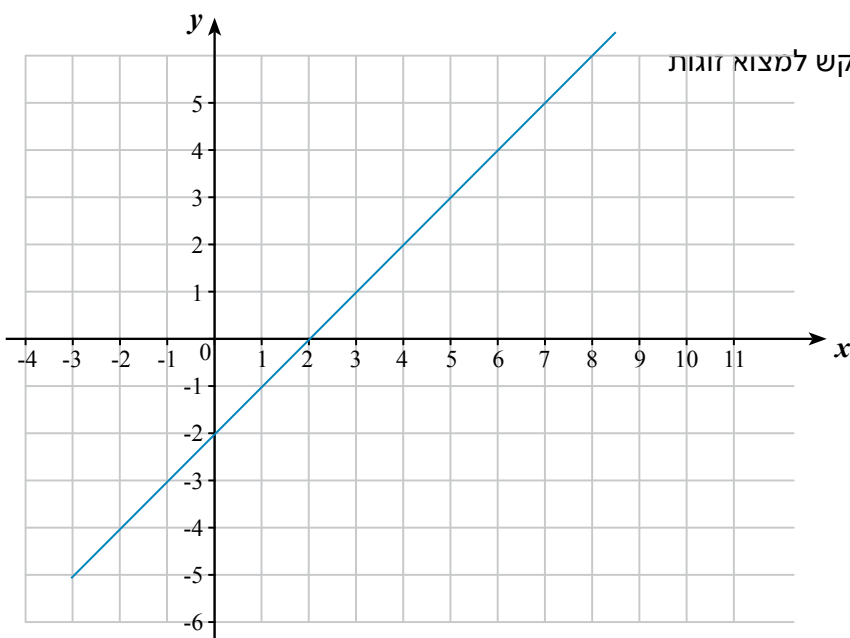
27 קשר בין גרפים ומספרים מכוונים. מומלץ לבקש מהתלמידים לצייר את הגרף במערכת שלמה.



הגרף הוא רציף. אפשר להרחיב את המשימה ולבקש למצוא זוגות כך ששני השיעורים חיוביים; זוגות ששיעור ה- x חיובי ושיעור ה- y שלילי; זוגות ששיעור ה- y חיובי ושיעור ה- x שלילי; וזוגות ששני השיעורים הם מספרים עשרוניים.

28 דוגמה של גרף לא-רציף.

29 לפני בניית הגרף שאלו את התלמידים אם הם יסרטטו מערכת שלמה או מערכת חלקית. המרחק לאחר שעתיים: 120 ק"מ; לאחר 5 שעות: 300 ק"מ; לאחר 8 שעות: 480 ק"מ; לאחר 10 שעות: 600 ק"מ.



30 אפשר להרחיב את המשימה ולבקש למצוא זוגות כך ששני השיעורים יהיו חיוביים; זוגות ששני השיעורים שליליים; זוגות ששיעור ה- x חיובי ושיעור ה- y שלילי; וזוגות ששני השיעורים הם מספרים עשרוניים.

- 31** הבהרה בין ייצוגים של אותו קשר: מלל, זוגות סדורים וגרף.
א $(1.5, 2.5)$ $(\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3})$ $(1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3})$ $(-2, -1)$ $(0, 1)$ $(2, 3)$ $(3, 4)$
- 32** הבהרה בין ייצוגים של אותו קשר: מלל, טבלה וגרף.
 הגרף אינו רציף (אין "חצי סוס" או אין "חצי פרסה"). בקשו מהתלמידים לתת הסבר לכך.
- 33** הקשיים במשימה הם בהבנת הנקרא והנתונים (האמתיים), בהבנת התופעה, בהתפתחות מקבילה של גיל בן-אדם וגיל חתול.
א 10 חודשים.
ב 12.5 שנות חתול. אפשר גם לקבל את התשובה 13.
ד 9.5 שנות בן-אדם, בהנחה שהקשר בין הגילים קווי. אפשר גם לקבל תשובה בין 8 ל-10 שנות בני-אדם.
 אפשר להרחיב את המשימה ולבקש לסרטט את הגרף המתאים לשנה השנייה של גיל חתול.

3.3. קשר בין משתנים

מגלים (עמ' 526)



בשלב זה התלמידים מתחילים להפנים שבפרק זה מדובר בקשרים בין שני גדלים. השאלות נועדו לחדד את תפקידי המשתנים: האם הם תלויים זה בזה? אם כן, איזה משתנה משפיע על האחר? לדוגמה, מספר הנורות באולם משפיע על כמות האור ולכן משפיע על התפוקה, אך לא להפך. (מספר החולצות לשעה אינו משפיע על מספר הנורות שבאולם).
 ההבחנה בין המשתנה המשפיע (החופשי) לבין המשתנה המושפע (התלוי) קובעת את בחירת שמות הצירים. על ציר ה- x מסמנים את המשתנים החופשיים (המשפיעים), ועל ציר ה- y מסמנים את המשתנים התלויים. יש להדגיש שזו החלטה שרירותית, אך היא מקובלת על כולם.

לומדים (עמ' 526 – 527)



בחלק הראשון מקנים את אוצר המילים **תחום** ו-**טווח**.
 חשוב שהתלמידים יבינו את המושגים **משתנה חופשי** ו**משתנה תלוי** ואת יחסי הגומלין ביניהם.
 התחום הוא המשפיע על הטווח והוא יירשם תמיד על ציר ה- x . התלמידים חייבים לקבוע מיהו התחום ומיהו הטווח. לעתים הבחירה אינה פשוטה, ויש לשאול את השאלה "מי תלוי במי?" או "מי משפיע על מי?" יש לציין ששניהם משתנים, כלומר שניהם יכולים לקבל ערכים שונים, וכל ערך של x מתאים לפחות לערך אחד של y .
 בחלק השני של השיעור מציגים את דרכי ייצוג הקשר: זוג סדור, גרף וטבלה. לכל דרך חשיבות משלה: משתמשים בזוג סדור במלל (הוא לא תופס מקום) ומאוחר יותר באנליזה (נגזרת ואינטגרל); גרף הוא חזותי אך לא תמיד מדויק; וטבלה מאפשרת לגלות את הקשר בין המשתנים הודות למספר הנתונים המופיעים בה.

משימות



כדאי לדון בעל-פה בסעיפים במשימות 34 ו-35.

34 דוגמה: גובהו של אדם תלוי בגילו, אבל גילו של אדם אינו תלוי בגובהו.

35 אפשר לקבל משפטים שונים. מומלץ בכל תרגיל לבקש את ההיגד האחר האפשרי.

דוגמה: תשלום בקנייה תלוי במספר תקליטורים שנקנו. האם מספר התקליטורים שנקנו תלוי בתשלום הקנייה? כוח תלוי במספר שעות עבודה. זמן כיסוח הדשה תלוי בשטח המגרש. זמן נסיעה תלוי באורך המסלול. מספר מכוניות על הכביש תלוי בשעה ביממה. קצב הליכה תלוי באורך הרגליים. אפשר להרחיב את המשימה על-ידי בקשה מהתלמידים למצוא דוגמאות נוספות.

בתרגיל 36 התלמידים מסרטטים גרף על-פי נתונים הרשומים בטבלה. הגרף מאפשר להם לענות ביתר קלות על שאלות שונות הקשורות לנתונים.

36 א התחום: מספר החודש; הטווח: כמות המים.

ג חיבור הנקודות יכול להראות שכמות המים עולה/יורדת בהדרגה (לא בקפיצות) במהלך החודש. הבדיקה נערכת רק פעם בחודש, בתחילתו או בסופו, אבל המים נאגרים/יוצאים במהלך כל החודש.

ד בין החודשים 2 ל-3 כמות המים קבועה וכן בין החודשים 9 ו-10. אפשר להגיד שהנקודות בגרף הן באותו גובה, או שהישר מקביל לציר ה- x .

ה מהחודש הראשון עד לחודש החמישי.

37 א מהשעה 10^{00} עד השעה 10^{00} למחרת.

ב הטמפרטורה תלויה בשעה.

ג ציר ה- x הוא ציר הזמן, השעות – המשתנה החופשי. ציר ה- y הוא ציר הטמפרטורה – המשתנה התלוי.

ד -7° בשעה 4^{00} .

ה 10° בשעה 15^{00} .

ו מהשעה 20^{00} עד 5^{00} .

ז מהשעה 10^{00} עד 20^{00} ומ- 6^{00} עד 10^{00} .

ח 10^{00} ו- 10^{00} למחרת, 11^{00} ו- 17^{00} , 19^{00} ו- 6^{00} , 23^{00} ו- 5^{00} .

ט 3° . בין השעות 20^{00} ל- 23^{00} הטמפרטורה ירדה מ- 1° עד -4° . כלומר הטמפרטורה ירדה 3 מעלות

ב- 3 שעות, לכן במוצק בכל שעה הייתה ירידה של מעלה אחת.

38 לא. בדרך-כלל אין קשר בין ההצלחה במקצועות השונים. אם מסרטטים גרף של הציונים, זוהי דוגמה של

החלטה שרירותית לקביעת שמות הצירים. המשתנים אינם תלויים זה בזה.

39 דונו בהצעות של התלמידים.

40 המשימה מהווה סיכום הנלמד.

א-ב הבנת הנקרא.

א 12 מ'. ב 2.4 מ'. ד $y = 4 \cdot x$

ו אפשר לחבר בין הנקודות. שני המשתנים הם רציפים.

בסעיפים ז' ו-ח' שטח החדר הוא משתנה תלוי נוסף לאותו משתנה חופשי (אורך הקיר).

ז 9 מ"ר. ח 6 מ'.

הרחבה אפשרית: סרטוט הגרף המתאים לשטח השטח.

ג. פונקציה

ג.1. זיהוי של פונקציה

מגלים (עמ' 530)



השאלה הראשונה בפעילות מקשרת בין השפה המדוברת והשפה המתמטית. המונח “פונקציה” הוא מילה לועזית ששימושה נפוץ בעברית. ברוב המקרים משמעותה היא “תלוי ב-”.

השאלה השנייה מכינה את התלמידים לאפיון של פונקציה: ל- x נתון מתאים רק ערך אחד של y .

לומדים (עמ' 530)



שיעור מרכזי זה מורכב משלושה סעיפים: הגדרה של פונקציה, זיהוי פונקציה בגרף וסימון של פונקציה.

הגדרה של פונקציה

ההגדרה הנתונה היא פורמלית, והיא הבסיס של הלימודים בהמשך, לכן מומלץ לחקור עם התלמידים את הדוגמה. רוב הזמן “השכל הישר” מאפשר לזהות אם קשר הוא פונקציה. לשם כך שואלים: “האם קיים ערך של x שמתאימים לו יותר מערך אחד של y ?”

למשל, לכל רגע יש טמפרטורה אחת, לכל גיל יש גובה אחד או משקל אחד.

יש תלמידים הטוענים שכאשר קשר הוא פונקציה, לא ייתכן שלשני ערכים שונים של x יתאים אותו ערך של y . כדאי לחזור לדוגמה ולהראות שהטענה אינה נכונה. (ייתכן שבשעות שונות חלה אותה טמפרטורה, ושבגילים שונים לבן-אדם אותו משקל...)

זיהוי פונקציה בגרף

כשמזיזים את הקו האנכי (מקביל לציר ה- y) לאורך הציר האופקי אפשר לגלות אם לאותו x מתאים יותר מ- y אחד. קשר אינו פונקציה, גם אם רק לערך אחד של x מתאימים יותר מכמה ערכים של y .

סימון פונקציה

כאמור, אחד הקשיים של התלמידים הוא השימוש בשתי צורות לכתובת פונקציה: $f(x) = y$ ו- $y = f(x)$. הצורה “ $f(x) =$ ” נפוצה הרבה יותר ושימושית יותר מהצורה “ $y = f(x)$ ” מכמה סיבות:

- היא מאפשרת להבחין בין פונקציות שונות;
- היא אינה תלויה בגרף;
- היא מראה בבירור מהו המשתנה החופשי;
- היא משתמשת רק במשתנה החופשי.

משימות



- 41 אפשר לראות ברשימת הזוגות הסדורים שהגרף מייצג פונקציה.
- 42 בייצוג קשר על-ידי חצים הזיהוי של פונקציה הוא קל, כי אפשר לראות מתי מכל x יוצא חץ אחד בלבד. הקשר $g(x)$ אינו פונקציה, מכיוון שיוצאים שני חצים מ- x מסוים. יתר הקשרים הם פונקציות ($f(x)$ הוא פונקציה אף-על-פי של- y מסוים מגיעים שני חצים).
- 43 א לא. ב כן. ג לא. ד כן. ה לא.
- 44 א כן. בכל הסעיפים שמתוארת בהם פונקציה, לכל x יש רק ערך אחד של y . בסעיפים האחרים יש כמה ערכי x שלהם כמה ערכי y .
- 45 א כן. ב $(4,16)$ $(3,9)$ $(2,4)$ $(0,0)$ $(-2,4)$ $(-3,9)$ $(-4,16)$
- 46 א כן. יש לשים לב שמותר שיהיו לאותו y כמה ערכי x . המשתנה התלוי יכול להיות תלוי בערכים שונים של המשתנה החופשי. ההפך אינו נכון. לכל ערך של המשתנה החופשי יש רק ערך אחד של המשתנה התלוי.
- 47 א כן. שיעור ה- y כאשר $x = 4$ הוא $f(4) = 16$.
- 48 א כן מודגמים שני המצבים האפשריים כאשר נתונים שני משתנים. במצב אחד (הטבלה של דפנה: לכול פריט – מחירו) מיוצגת פונקציה, ובמצב השני (הטבלה של מיכל: למחיר נתון – פריטים באותו מחיר) הקשר אינו פונקציה.
- 49 א כן. במשימה התלמידים רואים שלא כל קשר, גם אם הוא קשר הגיוני, הוא פונקציה. למשל, לגובה 185 ס"מ מתאימים שני גילים שונים המופיעים בטבלה, סבא היה בגובה זה גם בגיל 20 וגם בגיל 40. ייתכן שהוא נשאר בגובה זה אפילו יותר מ-20 שנה, וזה בהחלט הגיוני. הקשר בין הגובה לגיל אינו פונקציה, שכן לפי הגדרת הפונקציה, לכל ערך של משתנה חופשי מתאים ערך אחד בלבד של משתנה תלוי, וכאן לגובה מסוים מתאים יותר מגיל אחד.
- 50 א כן. אפשר להרחיב את המשימה על-ידי שאלות הנוגעות לקשר בין גילו של סבא לגובהו. הקשר הופך להיות קשר של פונקציה (לכל גיל מתאים גובה אחד בלבד). יש מספר גבהים המותאמים לגילים שונים, אך עדיין הקשר הוא קשר של פונקציה.
- 51 א כן. הקשר $f(x)$ אינו פונקציה. ישנם ערכי x שיש להם כמה ערכי y . הקשר $g(x)$ הוא פונקציה. לכל ערכי x יש אותו y . הקשר $h(x)$ אינו פונקציה. לאותו x יש ערכים רבים של y . יש להפנות את תשומת לב התלמידים להבדל בין $g(x)$ לבין $h(x)$. הקשרים $g(x)$ ו- $h(x)$ מאפשרים לאפיין ישרים מקבילים לצירים. למרות הדמיון ביניהם מעמדם במתמטיקה לגמרי שונה.
- 52 א כן. אפשר לתאר את הגרף בכמה אופנים: ערכי y חיוביים, למעט הנקודה $(0,0)$; הפונקציה נמצאת ברביע הראשון והשני; הגרף סימטרי לגבי ציר ה- y ; יש שיקוף על ציר ה- y .
- 53 א כן. ב $x = 10$ ג $x = -10$ ד $y = 100$ ה $y = 0$ ו כן. ז מספרים נגדיים. בהמשך הלימוד יכירו התלמידים גרף זה כפרבולה. גרף הפונקציה $y = x^2$.

50

- הביטוי למעבר מסולם הטמפרטורה לפי פרנהייט לסולם לפי צלסיוס מורכב. לתלמידים לא ברור מקור הביטוי ומדוע הוא נראה כך, דבר שיכול לגרום לקושי בשימוש בו.
- א** 10°C . מציבים בנוסחה במקום המשתנה F את המספר 50.
- ב** הטמפרטורה המתאימה לפי צלסיוס היא 0° . המים קופאים.
- ג** הטמפרטורה המתאימה לפי צלסיוס היא 100° . המים רותחים.
- ד** הטמפרטורה לפי פרנהייט היא התחום. הטמפרטורה לפי צלסיוס היא הטווח.

F	5°	14°	32°	41°	50°	68°
C	-15°	-10°	0°	5°	10	20°

- ה** בונים גרף לפי הנקודות שבטבלה. אפשר לחבר את הנקודות בישר, כיוון שסולם הטמפרטורה הוא רצף של מספרים, ולא רק מספרים "בודדים".
- ו** כן. לכל טמפרטורה לפי פרנהייט מתאימה רק טמפרטורה אחת לפי צלסיוס.
- ז** הגרף מתאר את הקשר בין הטמפרטורה לפי פרנהייט לבין הטמפרטורה לפי צלסיוס.
- ח** בגרף זה (שהוא הפוך לנתונים בתחילת השאלה) המשתנה החופשי הוא הטמפרטורה לפי צלסיוס והמשתנה התלוי הוא הטמפרטורה לפי פרנהייט.
- הפנו את תשומת לב התלמידים ליחידות בשני הגרפים ולמיקום ה-0.

2.2. ייצוגים שונים של פונקציות

עד כה למדו תלמידים לייצג קשר או פונקציה על-ידי טבלת ערכים, רשימה של זוגות סדורים, חצים, גרף ומלל. כעת מוסיפים ייצוג בסיסי יותר אך מופשט יותר: ביטוי אלגברי המייצג פונקציה.

מגלים (עמ' 535)



התלמידים כבר למדו לתרגם תיאור מילולי לביטוי אלגברי. כעת הם מתרגמים תיאור מילולי של פונקציה לביטוי אלגברי. כאן $f(x) = 2 \cdot x + 2$. התרגום הוא בדרך כלל של פונקציות המוגדרות על-ידי מספר אין-סופי של ערכים של המשתנה החופשי, ולכן הוא מהווה נוסחה כוללת לקשר. הביטוי האלגברי הוא הייצוג הקצר ביותר והפורמלי ביותר לפונקציה, הוא אינו חזותי, אך בעתיד הוא יהיה השימושי ביותר. לדוגמה, במקום לבנות משוואה לבעיה מילולית בונים פונקציה המתארת את הבעיה. לכן יש לבחור את הגודל שייצג המשתנה החופשי, ולבנות את הפונקציה בעזרתו על-ידי ביטוי אלגברי.

לומדים (עמ' 535)



התלמידים לומדים כי ייצוג של פונקציה על-ידי ביטוי אלגברי מראה כיצד הפונקציה פועלת. למשל אם בפונקציה $f(x) = x + 5$ מציבים ערכים ל- x , מקבלים את ערכי ה- y המתאימים. הביטוי האלגברי הוא הייצוג הסמלי של הפונקציה, הוא אינו חזותי כמו הייצוגים האחרים. הודות לאופי הפורמלי של הביטוי האלגברי, הוא מתאים לאין-סוף ערכים של התחום ולכן גם לאין-סוף ערכים של הטווח. לעתים אומרים שהוא "משוואת הפונקציה".

כאמור, במקום "ביטוי אלגברי" $f(x)$, אפשר לסמן "ביטוי אלגברי" y . צורת הכתיבה השנייה מתייחסת לייצוג הפונקציה על מערכת הצירים, ואילו צורת הכתיבה הראשונה אינה קשורה לייצוג חזותי. כעת מתרגלים מעבר מהייצוג האלגברי לייצוגים אחרים של הפונקציה ולהפך.

משימות



51 נתון תיאור מילולי. התלמידים מתבקשים לרשום את הנתונים בטבלה ובדיאגרמת חצים ולסרטט גרף.

א $x < 10$, ראשוני, $f(x) = x + 10$.

x	2	3	5	7
$f(x) = x + 10$	12	13	15	17

2	→	12
3	→	13
5	→	15
7	→	17

ה לא. המשתנה החופשי הוא המספרים הראשוניים. אין ביניהם מספרים ראשוניים נוספים.
ו כן.

במשימות 52 – 54 מומלץ לכתוב את התשובות בטבלה.

52 הפונקציה דומה לפונקציה שבמשימה הקודמת, אך התחום שונה.

x	-8	1	3	7
$f(x) = x + 10$	2	11	13	17

x	-8	1	3	7
$g(x) = 2 \cdot x - 1$	-17	1	5	13

x	-12	0	2	6
$f(x) = 0.5 \cdot x + 3$	-3	3	4	6

55 על התלמידים לגלות את הביטויים האלגבריים המייצגים פונקציות, על-סמך טבלאות ערכים.

$$h(7) = 5 \quad h(x) = x - 2 \quad f(25) = 50 \quad f(x) = 2 \cdot x$$

$$t(12) = 18 \quad t(x) = 1.5 \cdot x \quad g(22) = 11 \quad g(x) = 0.5 \cdot x$$

56 לשני המשתנים אותו מעמד. כאשר נתון סכום של שני מספרים' לשני המחוברים יש אותו תפקיד. הערך של כל אחד תלוי בערך האחר.

א $b = (20 - 2 \cdot a) : 2$ או $b = 10 - a$ ב-ו ג כאמור האורך תלוי ברוחב והרוחב באורך.
ד אם $a = 1$, $b = 9$; אם $b = 4$, $a = 6$. ה הגרף יהיה אותו גרף.

57 משימה חשובה גם בשל הנושא המתואר: מרחק בלימה של מכונית כפונקציה של המהירות.

משתמשים בגרפים מסוג זה לניתוח תאונות דרכים. אפשר לנתח את הגרף שבנספח בעל-פה.

א ציר אופקי: מהירות בק"מ בשעה; ציר אנכי: מרחק בלימה במטרים. חשוב לציין את היחידות.
 $P(100,90)$

ב N למכונית הנוסעת ב- 70 ק"מ בשעה דרושים 39 מטר כדי לבלום.

ג 75 מטר. **ד** 120 ק"מ לשעה. **ה** לא. **ו** כן. **ז** כן. **ח** כן.

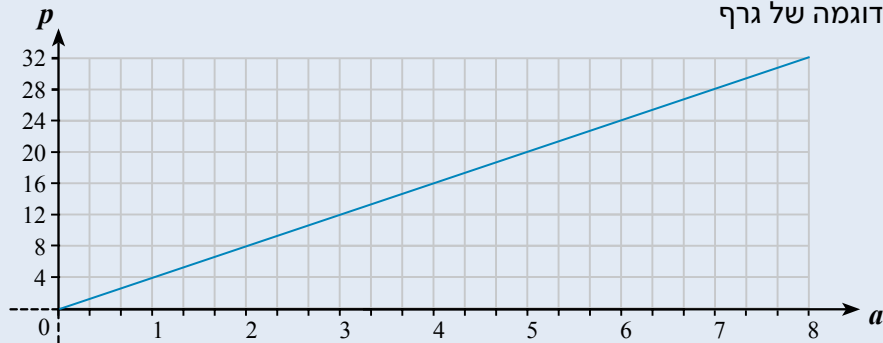
58 דוגמאות: $h(1) = 5$ $h(-1) = 1$ $h(0) = 3$ $h(5) = 13$ $h(-5) = 7$
 לכל t מתאים רק ערך אחד, לכן הקשר הוא פונקציה.

פיצוחים



59 **א** אפשר לכתוב כך $p = 4 \cdot a$ או $a = p : 4$

ב דוגמה של גרף

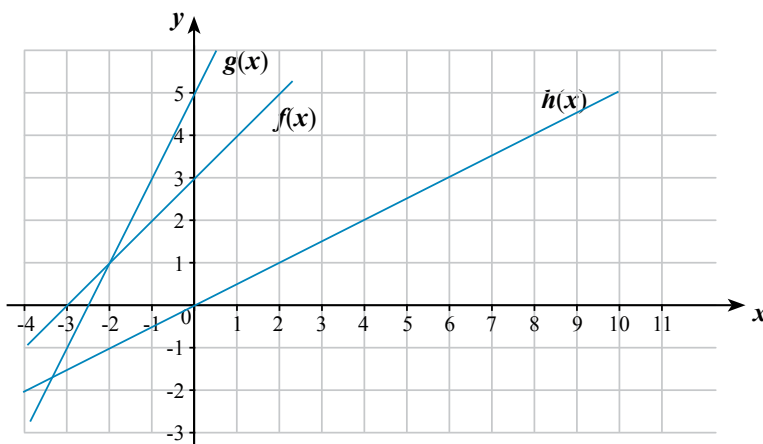


קיים קשר קווי בין המשתנים

ג ההיקף מוכפל ב- 3. **ד** אורך הצלע מחולק ב- 3.

המשימות 43 – 49 מתייחסות לביטוי אלגברי המתאים לגרף שהוא קו ישר. הנושא אינו חובה בתכנית הלימודים ויטופל בהרחבה בכיתה ח', אך הקדמה זו תאפשר לפתור משוואות שצורתן $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ בפרק 11.

60 מומלץ לבצע את המשימה בכיתה, ולנהל דיון לפני הסרטטים.



א כל הביטויים בנויים לפי אותו דגם, כפי ששרה כתבה.

ב התלמידים צריכים לכתוב את ערכי a ו- b בכל אחד מהביטויים. בפעילות זו הערכים הם חיוביים, בהמשך חלק מהערכים יהיו שליליים. יש להקפיד לרשום את הערך עם סימנו. כל הגרפים הם קווים ישרים.

61 משימת הכנה לקטע השיעור הבא.

א-ג אפשר לקבל פונקציות שונות בהתאם לבחירת התלמידים. כל הגרפים המתקבלים הם קווים ישרים.

לומדים (עמ' 538)



סיכום של התוצאות של משימה 62. אין להקפיד על התפקידים של a ושל b . העיקר הוא זיהוי הדגם והידע שהגרף המתאים הוא קו ישר שבונים לפי השיעורים של כמה נקודות.

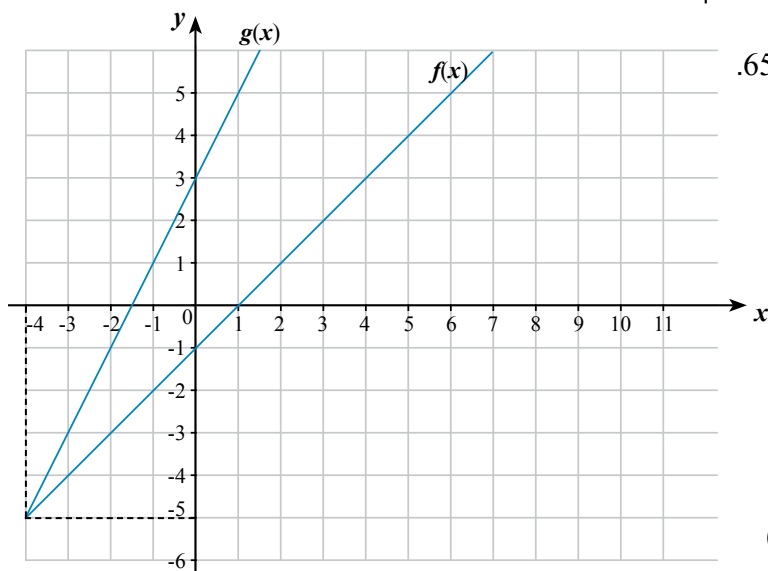
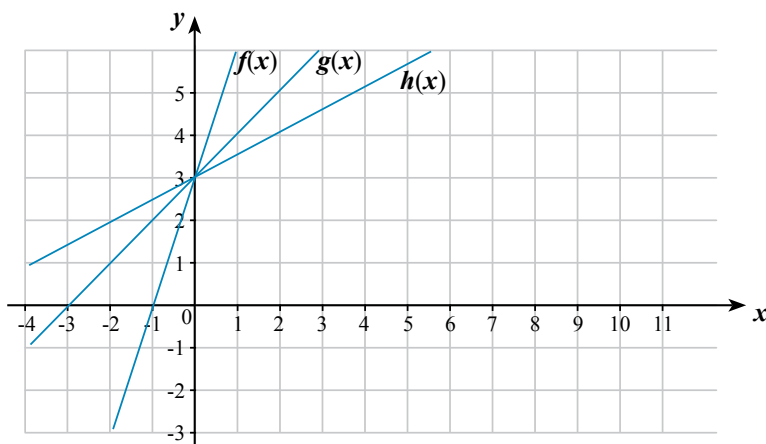
משימות



מומלץ לבצע בכיתה אחת מהמשימות 63 – 66, ואת האחרת כשיעורי בית.

62 עודדו את התלמידים לבנות טבלה כמו זו שראו.

x	-1	0	2	3
$f(x) = 3 \cdot x + 3$	0	3	9	12
$g(x) = x + 3$	2	3	5	6
$h(x) = 0.5 \cdot x + 3$	2.5	3	4	4.5



מומלץ לבצע בכיתה אחת מהמשימות 64 – 65. עודדו את התלמידים לבחור ערכים של x “נוחים לחישוב” ולפרט איך מוצאים את השיעורים של נקודת החיתוך.

x	0	1	2
$f(x) = x - 1$	-1	0	1
$g(x) = 2 \cdot x + 3$	3	5	7

נקודת חיתוך (-4, -5)

ד. השתנות פונקציה

ד.1. השתנות

מגלים (עמ' 540)



בפעילויות הגילוי מבחינים בין פונקציה בעלת השתנות קבועה (פונקציה קווית) לבין פונקציה שאינה בעלת קצב השתנות, אך אפשר לחזות את ההשתנות. התלמידים מגלים בגרף א', שהבִּרְכָה מתרוקנת במידה שווה כל שעה. לכן אפשר לחשב את כמות המים בכל רגע נתון. הבִּרְכָה השנייה אינה מתרוקנת במידה שווה כל שעה ואי-אפשר לחשב את כמות המים ברגע נתון ללא בדיקה בגרף.

לומדים (עמ' 540)



לאחר שתלמידים למדו לזהות קשרים שהם פונקציות, הם מתחילים לחקור את התכונות של פונקציה. התכונה הראשונה היא **השתנות**, כלומר מה הם הפרשים בין הערכים של הטווח (ע) כאשר הערכים של התחום (x) הם בהפרש קבוע? האם הפרשים בין הערכים של (ע) קבועים או לא קבועים? המדרגות ממחישות את קצב ההשתנות. התלמידים רואים שכאשר קצב ההשתנות קבוע, גובה המדרגות קבוע; וכאשר קצב ההשתנות אינו קבוע, גובה המדרגות משתנה. בגרף של קו ישר המדרגות תמיד שוות בגובהן (דבר המראה על קצב קבוע של השתנות). לעומת זאת בגרף של פונקציה שאינה קו ישר, גובה המדרגות משתנה, מה שמראה על קצב השתנות לא אחיד, ולכן גרף כזה מייצג פונקציה בעלת השתנות **בלתי-קבועה**. חשוב לציין שההפרש הקבוע בין הערכים של x אינו תמיד של יחידה אחת.

משימות



מומלץ לבצע את משימות 67 – 68 בכיתה בעל-פה.

67 א גרף ב'. ב גרף ב'. כאשר ההשתנות קבועה המדרגות הן באותו גובה.

68 א קו ישר. דוגמה של נימוק: דוד מקבל אותו סכום כל שעה.

ב גרף ה' (הערכים של גרף ג' אינם מתאימים).

לומדים (עמ' 543)



זיהוי השתנות קבועה בטבלת ערכים. על-פי הפרשים בין הערכים שבטבלאות הערכים אפשר לראות את השתנות הפונקציה. הפרשים בין ערכי ה-x הם קבועים בכל הפונקציות. בפונקציה הקווית הפרשים בין ערכי ה-y המתאימים גם הם שווים, ובפונקציה שאינה קווית הפרשים בין ערכי ה-y המתאימים משתנים. הערה: בלימוד יחס ופרופורציה בכיתה ח' נשתמש בייצוג של השתנות קבועה כדי לזהות גדלים פרופורציוניים.

משימות



- 69 א** טבלה א' מתאר השתנות שאינה קבועה. ההפרשים בין הערכים של התחום אינם קבועים. (בהמשך, כאשר התלמידים יעסקו בפונקציה הריבועית, יופיעו מספרים אלו.) גרף ב' מתאר השתנות קבועה. ההפרשים בין ערכי המשתנה התלוי קבועים. במקרה זה להפרש של יחידה אחת של המשתנה x מתאים הפרש של שתי יחידות של המשתנה y .
- 70** בשתי הטבלאות יש אותם ערכים של x . בטבלה א' להפרש של יחידה אחת של x צריך להתאים הפרש של 3 יחידות של y , כי ההשתנות צריכה להיות קבועה. לכן הזוגות $(3,11)$, $(5,17)$, $(6,20)$, $(7,23)$, $(8,26)$ מתאימים.
- בטבלה ב' הואיל וההשתנות אינה קבועה, אפשר להשלים בהרבה מאוד דרכים (רק לא בהפרש קבוע של 3).
- 71** משימה דומה למשימה הקודמת.
- בטבלה א' להפרש של יחידה אחת של x צריך להתאים הפרש של 10 יחידות של y , כי ההשתנות צריכה להיות קבועה. לכן הזוגות $(4,26)$, $(8,46)$, $(10,56)$, $(12,66)$, $(14,76)$.
- בטבלה ב' יכולים להיות הרבה מאוד מספרים (רק לא בהפרש קבוע של 10).
- 72** טבלאות א' ו-ד' מתארות פונקציות בעלות השתנות קבועה. טבלאות ב' ו-ג' מתארות פונקציות בעלות השתנות שאינה קבועה. אפשר לבדוק זאת לפי ההפרשים בערכי המשתנים התלויים.
- 73 א** גרף I מתאים לתנור אפייה (קצב החימום שונה). גרף II מתאים למיקרוגל (קצב החימום קבוע – קו ישר).
- ב** בעשר דקות במיקרוגל העוף מתחמם ב- 20° (דוגמה מ- 10° עד 10°). בחמש דקות העוף מתחמם ב- 10° (2 : 20) ובדקה הוא מתחמם ב- 2° .
- ג** בתנור העוף מתחמם ב- 60° . בדקה בממוצע העוף מתחמם ב- 2° . (30 : 60). החימום בדקה שווה אף-על-פי שקצב החימום שונה. במיקרוגל הקצב אחיד, כל דקה 2° , ואילו בתנור הקצב משתנה, והתוצאה היא ממוצעת.
- ד** לאחר 5 דקות של חימום ההפרש הוא 15° , לאחר 20 דקות ההפרש הוא 10° . (ההפרש הוא המרחק בין הגרפים בזמן נתון).
- 74** גרף ג' מתאר את העולה בקצב קבוע (קו ישר). גרף ב' מתאר את העולה בריצה (בתחילה קצב העלייה מהיר, הגרף עולה במהירות, בהמשך העלייה מתונה יותר). גרף א' מתאר את העולה בקצב קבוע, מפסיק למנוחה ואחר-כך ממשיך לעלות בקצב קבוע (קו ישר, ישר המקביל לציר ה- x – פונקציה קבועה – ושוב קו ישר) גרף ד' מתאר את הזקן הזקוק למספר מנוחות (הקטעים המקבילים לציר ה- x מתארים מנוחה).
- 75 א** גרף I – כלי C. (הכלי רחב למטה וצר למעלה, לכן קצב המילוי אטי ואחיד בהתחלה, ומהיר ואחיד בהמשך). גרף II – כלי D. (הכלי צר למטה ומתרחב כלפי מעלה, לכן בהתחלה קצב המילוי מהיר ואינו אחיד, ונעשה אטי יותר גם בקצב מילוי שאינו אחיד.)
- ב** כלי A – קצב מילוי אחיד. כלי B – קצב מילוי לא-אחיד, אטי בהתחלה, אחר-כך מהיר יותר ושוב נעשה אטי. כלי C – קצב מילוי אחיד. אטי ואחר-כך מהיר. כלי D – קצב מילוי לא-אחיד. מהיר ואחר-כך אטי.
- כלי E – הפוך מכלי D, קצב מילוי לא-אחיד, איטי ואחר-כך מהיר. כאשר הדפנות מאונכות לבסיס, קצב המילוי אחיד. כאשר הדפנות אינן מאונכות, לבסיס קצב המילוי לא-אחיד. ככל שהכלי צר יותר, הוא מתמלא מהר יותר.

ג גרף א' – כלי E. גרף ג' – כלי D. גרף ד' – כלי B. גרף ה' – כלי C. גרף ב' לא מתאים, אם נהפוך אותו לגרף עולה (קו ישר), הוא יתאים לכלי A.

2.2 פונקציה עולה ופונקציה יורדת

מאפיין שני של פונקציה: עלייה וירידה של פונקציה.

מגלים (עמ' 546)



במשימה “מנתחים” את תנועת העפיפון ומשתמשים במושגים ידועים – פונקציה, משתנה תלוי ומשתנה בלתי-תלוי, גרף, טבלת ערכים, טבלת חצים – ובמושגים מחיי היום-יום – עולה/יורד/קבוע – כדי להגדיר פונקציה עולה/יורדת/קבועה.

העלייה והירידה של הגרף המתאר את גובה העפיפון מן האדמה בקטעי זמן שונים ממחישה את תנועת העפיפון. כאשר העפיפון מתרומם, הגרף עולה; כאשר הגובה של העפיפון יורד, גם הגרף יורד; כאשר העפיפון נשאר באותו הגובה, גם הגרף נשאר באותו מרחק מציר ה- x . הייצוג בטבלת הערכים ממחיש את העובדה שכאשר גם ערכי ה- x גדלים וגם ערכי ה- y גדלים, הגרף עולה. כאשר ערכי ה- x גדלים וערכי ה- y קטנים, הגרף יורד. הייצוג של החצים הוא החזותי ביותר, ואפשר לזהות בבירור את קטעי העלייה, את קטעי הירידה ואת הקטעים בהם הפונקציה אינה עולה ואינה יורדת. ייצוג יועיל בעיקר מאוחר יותר בחשבון דיפרנציאלי.

א הגרף מתאר פונקציה.

ב התחום הוא הזמן, הטווח הוא גובה העפיפון.

ד העפיפון נשאר באותו גובה. הישר מקביל לציר ה- x , כלומר הזמן מתקדם, והגובה נשאר קבוע.

ה העפיפון יורד.

ו-ה ייצוגים שונים המתארים את תנועת העפיפון.

י יש לשים לב לקטעים השונים. בדרך-כלל בייצוג גרפי “קל” יותר לראות את הקשר בין המשתנים.

לומדים (עמ' 547)



השיעור מחולק לשני חלקים. בחלק הראשון מסבירים עלייה וירידה של פונקציה באופן אינטואיטיבי (שני המשתנים “מתנהגים” באותה צורה או לא באותה צורה). החלק השני מיועד לכיתות חזקות, ומובאת בו הגדרה פורמלית של פונקציה עולה או יורדת בקטע.

הגרף שמתאר את תנועת העפיפון מראה את קטעי העלייה והירידה בהם העפיפון עולה, יורד או נשאר באותו הגובה. הקטעים הם על ציר ה- x . כאשר ערכי התחום גדלים וגם ערכי הטווח גדלים, נאמר שהפונקציה עולה, וכאשר ערכי התחום גדלים וערכי הטווח קטנים, נאמר שהפונקציה יורדת. חשוב לייצג בפני התלמידים את הסרטטים הממחישים זאת.

בעמוד 548 מופיע ניסוח פורמלי של עלייה או ירידה של פונקציה.

הערה: הקטע $[ab]$ על ציר ה- x מסומן באותיות קטנות, כי מדובר בערכים מספריים של התחום, ולא בנקודות. הטבלה של החצים היא ייצוג חזותי יותר. אפשר לראות בה את תחומי העלייה והירידה.

משימות



במשימות 76 – 80 מזהים עלייה וירידה של פונקציה לפי גרף נתון.

76 א הפונקציה עולה: $-2 < x < 1$, $-7 < x < -5$

ב הפונקציה יורדת: $-5 < x < -2$, $4 < x < 7$

ג הפונקציה קבועה: $1 < x < 4$

77 א הטמפרטורה עלתה בין 3^{00} לבין 15^{00} . הטמפרטורה ירדה בין 0^{00} לבין 3^{00} ובין 15^{00} לבין 24^{00} .

ב העלייה והירידה של הגרף תואמת את העלייה ואת הירידה של הטמפרטורה.

78	x - זמן	-6	-4	0	2	4
	y - גובה	7	-4	5	0	-3

79 א הגרף עולה: $8^{00} < x < 10^{30}$, $14^{00} < x < 16^{00}$. הגרף יורד: $10^{30} < x < 12^{00}$, $16^{00} < x < 18^{00}$.

ב הגרף קבוע: $12^{00} < x < 14^{00}$.

80 מיכאל צודק. יש לציין בפני התלמידים את הטעות של יוסי, הטוען שכאשר ערכי התחום קטנים וגם ערכי הטווח קטנים, הפונקציה יורדת. הכלל הוא שכאשר קיים יחס ישר בין הגדילה או ההקטנה של המשתנים, כלומר כאשר שניהם גדלים באותו קטע או כאשר שניהם קטנים באותו קטע, הפונקציה עולה. כאשר בקטע מסוים ערכי משתנה אחד גדלים וערכי האחר קטנים, הפונקציה יורדת.

במשימות 81 – 83 מזהים עלייה וירידה של פונקציה לפי טבלת ערכים נתונה.

81 הפונקציה עולה: $3 < x < 6$, $0 < x < 2$; הפונקציה יורדת: $15 < x < 17$, $2 < x < 3$;

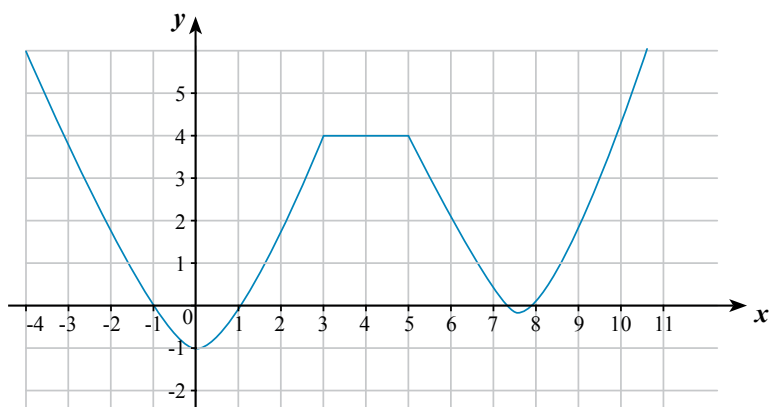
פונקציה קבועה: $6 < x < 15$.

82 טבלה א' – פונקציה קבועה. טבלה ב' – פונקציה יורדת. טבלה ג' – פונקציה עולה.

83 אפשר לצייר כמה פונקציות המתאימות לנתונים. בכל מקרה הגרף חותך את ציר ה- x בשתי נקודות

(בין $x = -5$ ו- $x = 0$ ובין $x = 0$ ו- $x = 3$) ובנקודה נוספת $(8, 0)$.

דוגמה



84 קריאת גרף שהנתונים בו מדעיים (גשמים). מומלץ לבקש מהתלמידים לחפש נתונים הקשורים לשנת הלימוד.

א הגרף עולה: $2000 < x < 2003$, $2004 < x < 2005$, $2006 < x < 2007$.

ב הגרף יורד: $2003 < x < 2004$, $2005 < x < 2006$.

ג ממוצע רב-שנתי.

ד 2003, 2002.

ה 2000, 2001, 2004, 2006.

ו 2005, 2007.

מיומנויות עמ' 552



קריאת נתונים בגרף

א קובעים מהו המשתנה החופשי ומהו המשתנה התלוי.

ב קובעים אותם על צירי המספרים בהתאמה. על ציר ה- x המשתנה החופשי ועל ציר ה- y המשתנה התלוי.

ג קובעים את קטע היחידה על כל ציר. מסמנים שנתות על כל ציר לפי הצורך העולה מהשאלה המילולית.

ד מסמנים את המיקום של הנקודות הנתונות בייצוג המילולי. (לעתים נעזרים בזוגות סדורים או בטבלאות ערכים).

ה מחברים בקו את הנקודות אם יש משמעות לחיבור זה.

בדוגמה שבסעיף זה מסרטטים שני קווים. נקודת המפגש ביניהם מתאימה לשאלה המבוקשת.

מוכנים להמשיך? עמ' 554



1 ב

2 א $f(4) = 3$, $f(-4) = 9$, $f(3) = 9$, $f(-2) = 9$

ב $f(0) = 1$

ג $y = 10$ אחד; $y = 9$ שלוש; $y = 2$ שניים.

ד $(-3, 10)$, $(-2, 9)$, $(3, 9)$, $(-4, 9)$, $(1, 2)$, $(-1, 2)$.

ה נקודה אחת.

ו $(0, 1)$

ז הגדול $x = 4$, הקטן $x = -5.5$

ח הגדול $y = 10$, $y = 1$. כולם חיוביים.

ט כן.

3 כן.

4 א 3 ב 2 ג ביום השני בין 18^{00} ל- 24^{00} .

5 א א גרף C. ב גרף A. ג גרף B.

תרגילים נוספים עמ' 556



אפשר לנהל את המשימות 86 – 87 בעל-פה.

85 קריאת גרף.

א לא. ג $(-1, 4)$ $(2, 2)$ ד $4 < x < 2$ ה 2 ו -3
 ז -1 ח 2, 5 ט 0, אחד. י -, אחד. יא 0.5, 3.5, 4.5

86 א $(-6, 0)$ $(0, 4)$

x	-7	-5	0	2	3	4	8
y	-1	4	9	7	6	5	9

ג $(3, 6)$ $(-\frac{1}{3}, -6.5)$

ד $3 < x < -6.5$ או $x > 8$

ה $x < -6.5$ או $3 < x < 8$

87 א בדקה ה- 12 נסגר הברז במכל א'. בדקה ה- 16 נסגר הברז במכל ב'.

ב במכל א' 540 ל'. במכל ב' 480 ל'.

ג בממוצע 45 ל' בדקה. רק עד הדקה ה- 12 נכנסים מים, ובסה"כ 540 ל'. $45 = 540 : 12$

ד בממוצע 15 ל' בדקה. במשך 16 דקות נכנסו 240 ל'. (בתחילה היו 240 ל'). $15 = 240 : 16$

ה מכל א'. אפשר להסביר בעזרת הממוצע.

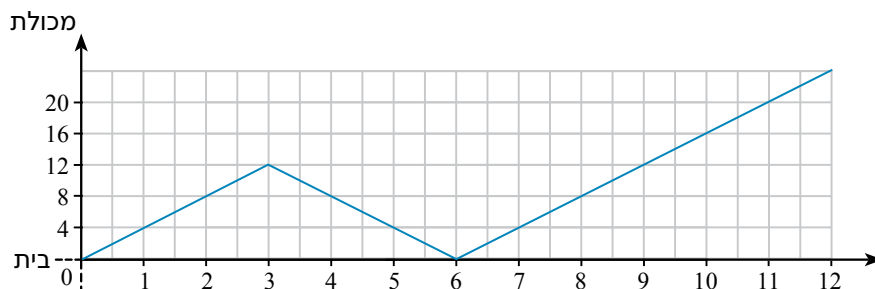
88 ב החל מהדקה ה- 8 גרף א' מעל גרף ב'. עד הדקה ה- 8 גרף ב' מעל גרף א'. הגרף שנמצא מעל לשני

מראה שכמות המים במכל שהוא מייצג גדולה יותר.

ג הישר מקביל לציר ה- x, כמות המים נשארת שווה. הברזים סגורים.

ד בדקה ה- 8 בשני המכלים כמות מים שווה. 360 ל'.

89 דוגמה של גרף. בקשו מהתלמידים לקבוע מהו הזמן הנדרש להגיע למכולת, ולבנות את הגרף בהתאם.



ב הזמן הוא התחום. המרחק מהבית הוא הטווח.

- 90 א הנתונים מופיעים כזוג סדור, התלמידים מתבקשים לסרטט גרף.
 ב מתקבל קו ישר.
 ג זו פונקציה, כי לכל x מותאם רק ערך אחד של y .
- 91 א $g(a) = 3 \cdot a + 3$ ב $g(1) = 6$ ג פתירת המשוואה $3 \cdot a + 3 = 30$; $a = 9$
 92 א-ב כן. ג לא. אפשר לשנות את $x = 5$ בשורה האחרונה כדי לקבל פונקציה. ד כן.
- 93 א כן. הכמות ההתחלתית 60 ל', ובכל שעה נוספים 12 ל'. ב 120 ל'.
 94 משימה פתוחה. קיימות תוצאות שונות, בהתאם לבחירת המספרים.
- 96 קריאת גרף שאפשר לבצע בעל-פה. ראשית הצירים היא מרכז סימטריה. לערכים נגדיים של x מתאימים ערכים נגדיים של y .
 97 משימה פתוחה לשיעורי בית.
- 98 א $f(6) = 4$, $f(0) = 0$, $f(-12) = -8$, $f(2) = \frac{4}{3}$
 99 נתונים מופיעים בטבלה. התלמידים מתבקשים לסרטט גרף ולתאר אותו מילולית.
 א לכל מספר טבעי מותאם מספר הגדול ממנו פי ארבעה. ד כן.

ממשיכים בתרגול עמ' 560



- 100 משימה פתוחה.
- 101 א $s(n) = 2 \cdot n + 1$ ב $s(5) = 11$; $s(20) = 41$ ג $(0,1)$
- 102 אם יש זמן, כדאי לבצע את המשימה בכיתה בעל-פה.
 בסעיפים א', ד', ו' ו-ז' השתנות קבועה.
- משימות 103 – 104. ייתכנו גרפים שונים. ציר ה- x מייצג את הזמן וציר ה- y את המרחק. הגרף מתאר את המהירות. ככל שהזמן מתקדם, המהירות קטנה בגלל העייפות.
- 105 א כן, הדרך משתנה בהתאם לזמן שעבר. לכל זמן מרחק שונה.
 ב $H(3) = 240$
- ג 3.75 שעות. 300 ק"מ במהירות 80 קמ"ש. $3.75 = 80 : 300$, כלומר שלוש שעות ו-45 דקות.
 תלמידים לא תמיד יודעים לתרגם מספר עשרוני לשעות ודקות.
- 106 מקשרים בין פונקציות ומיומנויות שנרכשו בפרק א'.
 א $h(x) = 1 + 2 \cdot x$ ב $h(5) = 11$

107 משימה פתוחה לשיעורי בית ולדין בכיתה. אפשר לתאר כל גרף בכמה צורות.

דוגמאות:

גרף א: זורקים כדור והוא נופל על חפץ שעל הרצפה.

גרף ב: תיאור של טיול הלוך וחזור.

גרף ג: שיעור מניות בעשרה ימים של משבר, צריכת חשמל ביממה.

גרף ד: יציאה לירושלים: הכנה לטיול, נסיעה, הפסקה (פקק, מסעדה...), הגעה למרחק מה מהיעד.

גרף ה: ירידה ממגלשה (לא יורדים מהמגלשה בסוף הירידה). קפיצה של חתול מגג על חפץ או על עציץ.

גרף ו: טיול בהרים (ע מייצג את הגובה מעל פני הים).

108 גרף A מייצג את הקשר בין מספר השידורים להכנסות ממכירת הכרטיסים. גרף B מייצג את הקשר בין

מספר השידורים לבין הוצאות הפרסום.

ג לאחר 5 שידורים ההכנסות ממכירת הכרטיסים החלו לעלות.

ד הרווח 6,500 ש. הרווח ממכירת הכרטיסים 9,000 ש, הוצאות הפרסום 3,000 ש. (9500 – 3000)

יש לזכור להפחית את הוצאות הפרסום מההכנסות.

ה הגרף הימני הוא המתאים ביותר. בהתחלה אין השפעה למספר שידורי הפרסום, אחר-כך ההשפעה

גדולה, ומכירת הכרטיסים גדלה מאוד. לאחר מספר גדול של שידורים אין לשידורים השפעה, והמכירה

נשארת קבועה. בגרף האמצעי יש ירידה במכירה, ובגרף השמאלי ההשפעה אחידה כל הזמן, וזה לא

מתאים לבעיה.

8	6	3	1	9	4	5	7	2
2	7	5	8	3	6	9	4	1
1	9	4	5	7	2	3	8	6
3	4	1	9	6	7	2	5	8
9	5	2	3	4	8	1	6	7
7	8	6	2	1	5	4	3	9
4	2	9	6	8	3	7	1	5
6	3	7	1	5	9	8	2	4
5	1	8	7	2	4	6	9	3

109

העמקה עמ' 565



- 1 א** מספר הקומות זהה למספר הציור.
- ב** בכל שכבה 2 קוביות פחות מאשר בשכבה שמתחתיה.
- ג** מספרים אי-זוגיים עוקבים.
- ד** בסה"כ 25 קוביות: בשורה העליונה קובייה אחת, בשורה שמתחתיה 3 קוביות, בשורה השלישית 5 קוביות, ברביעית 7 קוביות, בחמישית 9 קוביות.
- ו** $2 \cdot n - 1$
- ז** n^2 . אחת הדרכים להגיע לביטוי היא בעזרת הסרטוט. בסרטוט יש מלבן הבנוי מפעמיים הצורה. אורך המלבן $2 \cdot n$ ורוחבו n , לכן שטחו הוא מספר הקוביות המרכיב אותו: $2 \cdot n \cdot n$. הצורה המבוקשת היא מחצית המלבן, לכן $n^2 = \frac{2 \cdot n \cdot n}{2}$.
- ט** בסרטוט 10:10 קומות. מספר הקומות שווה למספר הסרטוט.
- י** 81. לפי הביטוי בסעיף ז'.

2 א

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12

- המספרים ממשיכים בדרך זו. לכל מספר זוגי והמספר האי-זוגי העוקב לו מתקבל ערך שווה. הערכים המתקבלים הם המספרים הטבעיים בין 0 ל-12.
- ב** אי-אפשר לחבר את הנקודות. מדובר במספרים טבעיים בלבד, ואין מספר נוסף בין כל שניים מהם.
- ג** כן.