טז. טכניקות אלגבריות

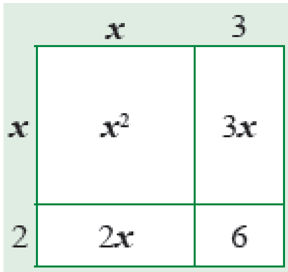
רקע

בכיתות קודמות למדו התלמידים להשתמש בחוק הפילוג של הכפל מעל החיבור כדי לפתוח סוגריים במקרים בסיסיים, לפתור סוגים שונים של משוואות ממעלה ראשונה, לצמצם שברים מספריים ובמקרים מסוימים אף שברים אלגבריים (ראו פרק ט'). בפרק זה, המהווה מצד אחד סיכום והרחבה של כל הטכניקות האלגבריות שנלמדו עד כה ומצד שני מעין מבוא לכיתה ט' (בפרט בשל ההתייחסות למגוון ביטויים ממעלה שנייה), הם ינצלו את כל הידע הנ"ל כדי להשתמש בחוקי חשבון על מנת לפשט או להשוות ביטויים אלגבריים מורכבים, להשתמש בחוק הפילוג המורחב, להוציא גורם משותף מביטויים אלגבריים, לצמצם שברים אלגבריים, ולפתור מגוון משוואות ושאלות מילוליות הנפתרות על-ידי כלים אלה.
יש לציין כי אף-על-פי שניתן היה ללמד את כל הטכניקות הנלמדות כאן בדרך אלגברית פורמלית בלבד, חלק ניכר מהן הודגמו על-ידי ייצוגים גיאומטריים.

דוגמאות:

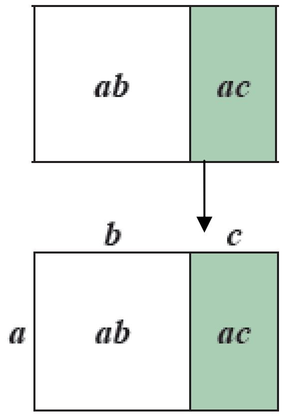
- לחוק הפילוג המורחב:

פתיחת הסוגריים בביטוי $(x + 3)\cdot(x + 2)$:



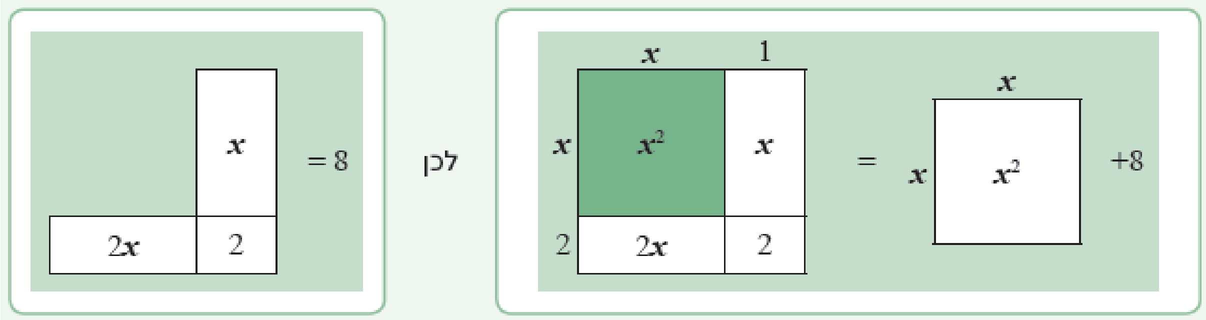
- להוצאת גורם משותף:

הוצאת גורם משותף מהביטוי $ab + ac$:



- לפתרון משוואה:

פתרון המשוואה $(x + 3)\cdot(x + 2) = x^2 + 8$:



ייצוגים אלה מועילים להמחשת המושגים הנלמדים, בפרט אצל התלמידים המתקשים, שבדרך כלל אינם "רואים" את המשמעות המוחשית של הפעולות שהם מתבקשים לבצע. באופן כללי יותר ידוע כי ככל שתלמיד יודע לייצג בעיה נתונה בדרכים שונות כך הסיכוי שהוא יוכל לפתור אותה גדל. לכן רצוי להשתמש בהם באופן תדיר ולעודד את התלמידים להשתמש בהם, אפילו אם הדבר אינו מבוקש בפירוש בשאלות שהם פותרים. לסיכום: באלגברה, סרטוטים חשובים כמו חישובים (או כמעט!).

הקשיים העיקריים שבהוראת הפרק

- קושי למורה: להפוך את לימוד הטכניקה למעניין.
- ללמד את שמות החוקים, להדגיש יישומים של חוקים על ביטויים מורכבים.
- צמצום שברים אלגבריים: מותר לצמצם בכפל ולא בחיבור או חיסור.
- השימוש בחוק הפילוג המורחב מבלבל כאשר יש "מינוס" בתוך הסוגריים.
- הוצאת גורם משותף, כאשר הגורם הוא ביטוי אלגברי.
- בביטויים עם שברים הרבה תלמידים אינם מתייחסים לתחום ההצבה. בעיה זו קיימת במיוחד במסגרת פתרון משוואות בצורת שבר שווה ל- 0.
- כאשר מכפלת גורמים עם סוגריים שווה לאפס, חלק מהתלמידים מנסים לפתוח את הסוגריים.

מושגים ומונחים

ביטויים אלגבריים, משתנה, חוקי חשבון, חוק החילוף, חוק הקיבוץ, חוק הפילוג, ביטויים שקולים, ביטויים נגדיים, הוכחה, דוגמה נגדית, חוק הפילוג המורחב, פתיחת סוגריים, כינוס איברים דומים, ייצוג גרפי, נעלם, פתרון משוואה, משוואות שקולות, בדיקה על-ידי הצבה, פתרון שאלה מילולית, גורם משותף, הוצאת גורם משותף, שברים, צמצום, חזקות, תחום הצבה, מכפלה שווה ל- 0, שבר שווה ל- 0.

מטרות

התלמידים ידעו:

א. להשתמש בחוקי החילוף, הקיבוץ והפילוג כדי לפשט ביטויים אלגבריים;
ב. להשתמש בחוקים אלה כדי להוכיח כי שני ביטויים הם שווים או נגדיים;
ג. להשתמש בדוגמה נגדית כדי להוכיח כי שני ביטויים אינם שווים או אינם נגדיים;
ד. להשתמש בחוק הפילוג המורחב כדי לפתוח סוגריים בביטויים בצורה $(ax + b)(cx + d)$;
ה. לפתור משוואות ושאלות מילוליות הנפתרות על-ידי חוק הפילוג המורחב;
ו. להוציא גורם משותף מספרי או אלגברי מביטוי נתון;
ז. לצמצם שבר אלגברי נתון תוך התייחסות לתחום ההצבה שלו;
ח. לפתור משוואות שבצורת מכפלת גורמים השווה ל- 0;
ט. לפתור משוואות שבצורת שבר אלגברי השווה ל- 0;

א. מגלים ולומדים, עמ' 345

א. <u>ביטויים אלגבריים וחוקים</u>, עמ' 345

<u>מגלים</u>

1. מאחר שהמטרה העיקרית של שיעור זה היא ליישם את חוקי החילוף, הקיבוץ והפילוג על ביטויים אלגבריים, מתבקשת חזרה קצרה על היישום של אותם חוקים עם מספרים "רגילים". ניתן להדגיש שאילו חוקים אלה (ובפרט חוק הקיבוץ) לא היו מתקיימים שרשראות פעולות כגון $(2 + 3) + (4 + 5)$

או $5 + (4 + (3 + 2))$ היו נותנות תוצאות שונות, ולכן אי אפשר היה לכתוב ביטויים כגון $2 + 3 + 4 + 5$ בלי סוגריים כפי שאנו רגילים לכתוב.

2. התלמידים מתחילים "לשחק" עם חוקי החשבון/הפעולות בביטויים אלגבריים. כפי שנעשה פעמים רבות בהמשך הפרק (בפרט בשיעור המוקדש לחוק הפילוג המורחב) הדגמנו את השימוש בחוק הפילוג ובחוק החילוף עם ייצוגים בצורת מלבן: יש לציין כי ייצוגים מסוג זה שימשו את המתמטיקאים לצורך כתיבה ופירוש של ביטויים מתמטיים כבר מתקופת יוון העתיקה. הם מהווים עזרה חשובה לתלמידים המתקשים להבין את המשמעות של ביטויים עם אותיות, לכן מומלץ לעודד אותם להשתמש בהם באופן תדיר ככל האפשר כדי להדגים את חישוביהם.

לומדים

כאן מזכירים את השמות של חוקי החשבון השונים ומדגימים אותם עם מספרים "רגילים", משתנים וביטויים מורכבים יותר. יש לציין שלעתים אנו משתמשים בכמה חוקים בבת אחת מבלי להיות מודעים לכך.

לדוגמה: כאשר כותבים $2\boldsymbol{x}\cdot(3\boldsymbol{x} + 1) = 6\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x}$ אנחנו משתמשים בבת אחת ב:

- חוק הפילוג: $2\boldsymbol{x}\cdot(3\boldsymbol{x} + 1) = 2\boldsymbol{x}\cdot 3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}$;
- חוק החילוף: $2\boldsymbol{x}\cdot 3\boldsymbol{x} = 2\cdot 3\cdot \boldsymbol{x}\cdot \boldsymbol{x}$;
- חוק הקיבוץ: $2\cdot 3\cdot \boldsymbol{x}\cdot \boldsymbol{x} = (2\cdot 3)\cdot(\boldsymbol{x}\cdot \boldsymbol{x}) = 6\boldsymbol{x}^2$;

לכן, בשל המורכבות של חישובים מסוג זה, יש להציע תרגול מתאים לתלמידים, כדי שהם יוכלו ליישם את העקרונות הנלמדים כאן, לצורך הפעלת חוק הפילוג המורחב ופתרון משוואות כפי שנראה בהמשך הפרק.

מתרגלים

1. על התלמידים לזהות את החוקים שהשוויונות הנתונים נובעים מהם.
א) חוק החילוף בחיבור. ב) חוק הקיבוץ בחיבור. ג) חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור.
ד) חוק החילוף בחיבור. חיסור מספר שקול לחיבור המספר הנגדי לו, ולכן התרגיל הוא כתרגיל חיבור, ומתקיים בו חוק החילוף. ה) חוק החילוף בכפל. אחד מגורמי המכפלה הוא ביטוי אלגברי הרשום בסוגריים. ו) חוק הקיבוץ בכפל.

2. בכל אחד מהסעיפים יש יותר משלב אחד. א) השלב הראשון: חוק החילוף בכפל, נקבל $2\cdot 3\cdot x\cdot x$. השלב השני: מכפלת הגורמים השווים נכתבת כחזקה. ב) השלב הראשון: חוק החילוף בכפל, נקבל $4x+4\cdot 5x=4x+20x$. השלב השני: כינוס איברים דומים (חוק הפילוג). ג) השלב הראשון: חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור. נקבל $x+x\cdot 2x$, השלב השני: חוק החילוף בכפל, נקבל $x+2x\cdot x$. השלב השלישי: מכפלת הגורמים השווים נכתבת כחזקה. אפשרות נוספת: בשלב הראשון מפעילים את חוק החילוף בכפל. נקבל $x(1+2x)$. שלב שני: חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור. נקבל $x+2x\cdot x$. השלב השלישי: מכפלת הגורמים השווים נכתבת כחזקה. ד) השלב הראשון: חוק הקיבוץ בכפל. נקבל $3\cdot x(x-1)$. השלב השני: חוק הפילוג של הכפל מעל החיסור.

3. א) חוק החילוף בחיבור. ב) חוק הקיבוץ בחיבור. ג) חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור.
ד) חוק החילוף בכפל. את החזקה אפשר לכתוב כמכפלה של שני ביטויים שווים, ולכן היא כתרגיל כפל שמתקיים בו חוק החילוף.

לומדים

בהמשך השיעור דנים בבעיה כללית בה הרבה תלמידים נכשלים/מתקשים: "כיצד מוכיחים כי שני ביטויים נתונים שקולים או כי שני ביטויים נתונים אינם שקולים?" התשובה לכך נותנת הזדמנות למורה להיכנס עם התלמידים לדיון מתמטי עמוק יותר על התפקידים של הוכחות ודוגמאות (לאו דווקא בתחום המתמטיקה).

הערה: התלמידים אינם אמורים לדעת כי שני רב-איברים שקולים אך ורק אם לשניהם אותם מקדמים, לכן אי-אפשר לקבוע ששני ביטויים אינם שקולים על סמך המקדמים שלהם.

מתרגלים

4. בסעיפים א-ח מכפלת הגורמים השווים נכתבת כחזקה. בחלק מהסעיפים יש להיעזר תחילה בחוק החילוף בכפל.

5. בסעיף ג' אפשר לצמצם ב-x ,ונקבל 1/2. בסעיפים ד-ו יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.

7. יש לפתוח את הסוגריים לפי חוק הפילוג. יש לשים לב לסימנים ולכתיבת מכפלת גורמים שווים כחזקה.

8. בכל אחד מהסעיפים יש יותר משלב אחד. א) השלב הראשון: חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור. השלב השני: מכפלת הגורמים השווים נכתבת כחזקה. השלב השלישי: חוק החילוף בחיבור. ב) השלב

הראשון : חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור. השלב השני : חוק החילוף בחיבור. ג) השלב הראשון : חוק הפילוג של הכפל מעל החיסור. השלב השני : חוק החילוף בחיבור ובכפל. חיסור מספר שקול לחיבור המספר הנגדי, ולכן התרגיל הזה הוא כתרגיל חיבור. ד) השלב הראשון : חוק הפילוג של הכפל מעל החיסור. השלב השני : חוק החילוף בחיבור. השלב השלישי : מכפלת הגורמים השווים נכתבת כחזקה.

9. א) הביטויים אינם שקולים. אם נציב 0 בכל אחד מהביטויים, נקבל תוצאות שונות. ב) הביטויים שקולים (חוק החילוף בחיבור). ג) הביטויים שקולים (הפעלה חוזרת של חוק החילוף בחיבור). ד) הביטויים אינם שקולים. אם נציב 0 בכל אחד מהביטויים, נקבל תוצאות שונות. הפעלה לא-נכונה של חוק הפילוג של הכפל מעל החיסור. ה) הביטויים אינם שקולים. אם נציב 0 בכל אחד מהביטויים, נקבל תוצאות שונות. האיברים לא דומים, ולכן אי-אפשר לכנסם. ו) הביטויים שקולים (חוק הפילוג של הכפל מעל החיסור ואחר-כך כינוס איברים דומים).

10. אפשר לבקש מהתלמידים להסביר מדוע השוויון נכון או לא-נכון.
א) לא-נכון. אפשר להסביר זאת על-ידי הפעלה לא-נכונה של חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור. או על-ידי הפעלה של חוק הקיבוץ בתרגיל בו אי-אפשר להפעילו. (חוק הקיבוץ מתקיים כאשר יש פעולות כפל בלבד או פעולות חיבור בלבד.) ב) נכון. חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור. ג) לא-נכון. ההסבר כמו בסעיף א'. ד) נכון. בשלב הראשון חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור. בשלב שני : מכפלת הגורמים השווים נכתבת כחזקה. וכן חוק החילוף בכפל. ה)נכון. ו) לא-נכון. הפעלה לא-נכונה של חוק החילוף בחיבור בביטוי שבתוך הסוגריים. ז) לא-נכון. בשלב הראשון חוק החילוף בחיבור בביטוי שבתוך הסוגריים. בשלב שני פתיחה לא-נכונה של הסוגריים. ח) נכון. בשלב הראשון פתיחה נכונה של הסוגריים. בשלב שני חוק החילוף בחיבור ואח"כ כינוס איברים דומים.

11. יש לפתוח את הסוגריים לפי חוק הפילוג. יש לשים לב לסימנים.

12. יש לפתוח את הסוגריים לפי חוק הפילוג. יש לשים לב לסימנים ולכתיבת מכפלת הגורמים השווים כחזקה.

13. א) חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור, מכפלת הגורמים השווים נכתבת כחזקה. $2x^2+24x$. ב) השלב הראשון חוק החילוף בחיבור בתוך הסוגריים $3(x+1-7)=3(x-6)$. השלב השני : חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור, $3x-18$. ג) חוק החילוף בחיבור. חיסור מספר שקול לחיבור המספר הנגדי, $(5-(x+1))(6x)=(4-x)6x$. חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור, מכפלת הגורמים השווים נכתבת כחזקה.$24x-6x^2$.

14. לפי חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור נקבל באגף השמאלי : $2c(a+b)=2ca+2cb$. לפי חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור, נקבל באגף הימני : $ca+cb+ca+cb$. לפי חוק החילוף בחיבור וכינוס איברים דומים, נקבל : $2ca+2cb$. קיבלנו שוויון של שני האגפים.

בתרגילים 17-14 יש לפתוח את הסוגריים הימניים או השמאליים, לפי חוק הפילוג. יש לשים לב לסימנים.

19. א) גבי צודק. הוא פתח את הסוגריים הימניים לפי חוק הפילוג ו"סידר" את הביטוי. בחוק החילוף, מכפלת הגורמים השווים נכתבת כחזקה. ב) צור לא צודק. הוא פתח את הסוגריים לפי חוק הפילוג ו"סידר" את הביטוי. הוא טעה בכינוס האיברים הדומים.

לומדים

בחלק זה של השיעור, המוקדש למושג *ביטויים נגדיים*, אנו חוזרים על המושגים *הוכחה כללית*, *דוגמה נגדית* שנלמדו בקטע השיעור הקודם. בנוסף מסבירים לתלמידים כיצד להשתמש בסימן מינוס ובסוגריים בצורה נכונה.

מתרגלים

20. א) הביטויים נגדיים. ב) הביטויים לא-נגדיים. ג) הביטויים לא-נגדיים. ד) הביטויים לא-נגדיים. ה) הביטויים לא-נגדיים. ו) הביטויים נגדיים. יש לפתוח את הסוגריים לפי חוק הפילוג של הכפל מעל החיסור.

21. א) $-x-3$ ב) $-9x+7$ (או : $7-9x$) ג) $1+x^2$ ד) $-x^2+4x-10$ ה) $-6(7x+8)$ ו) $4x-9$.

22. א) הביטויים שקולים. חוק החילוף בחיבור (חיסור מספר שקול לחיבור המספר הנגדי).
ב) הביטויים נגדיים. הפעלה חוזרת של חוק החילוף בחיבור (חיסור מספר שקול לחיבור המספר הנגדי). ג) הביטויים נגדיים. חוק הקיבוץ בכפל , מכפלת הגורמים השווים נכתבת כחזקה.
ד-ו) הביטויים לא שווים ולא נגדיים.

23. א) $-(3x-1)=-3x+1=1-3x$. ב) $-(4+5x)=-4-5x=-5x-4$.
ד) $-(-2x+8)+2(4-x)=2x-8+8-2x=2x-2x=0$.

ב. <u>חוק הפילוג המורחב</u>, עמ' 355

<u>מגלים</u>

1. כאן דנים בדוגמה מספרית לשימוש בחוק הפילוג המורחב בעזרת ייצוג בצורת מלבן. באופן כללי ניתן לכתוב מגוון חישובים כגון $101\cdot101$, $201\cdot204$ או $99\cdot99$ על-ידי חוק הפילוג, ללא צורך במחשבון ובכתיבת הפעולות בטורים.
2. עוברים לשימוש בחוק הפילוג עם אותיות (בלבד). שאלה ה' מראה בפרט על-ידי אילו שלבים ניתן להוכיח כי הביטויים $(a+b)\cdot(c+d)$ ו- $ac+ad+bc+bd$ שקולים.

<u>לומדים</u>

בשיעור זה אנו מציעים הוכחות שונות לחוק הפילוג המורחב, וכן דרכים שונות לפתוח סוגריים בביטוי נתון: על-ידי ייצוג בצורת מלבן, על-ידי טבלה (מומלץ לתלמידים המתקשים, ובפרט כאשר מופיעים סימני מינוס בביטוי הנתון), על-ידי חישובים אלגבריים ללא ייצוג כלל. המטרה היא לתת לתלמידים מודעות למגוון הכלים שברשותם, ובכך לתת להם אפשרות לבחור את הדרך הנוחה להם להשתמש בחוק הפילוג או לבדוק את עצמם באופן יעיל.
החלק הראשון של השיעור מוקדש לייצוגים חזותיים של חוק הפילוג המורחב על-ידי מלבנים מחולקים.

<u>מתרגלים</u>

בתרגילים 24 - 25 אורכי הצלעות של המלבן הם גורמי המכפלה. הסכום של שטחי ארבעת המלבנים הוא שטח המלבן הגדול, כלומר מכפלת שני הגורמים הנתונים. בתרגיל 23 הגורמים הם מספרים. בתרגיל 24 הגורמים הם ביטויים אלגבריים.

26. שאלה זו משלבת משתנים ומספרים "רגילים". היא גם מאפשרת דיון בנושא כינוס איברים דומים לאחר שימוש בחוק הפילוג. בהקשר לנקודה זו ניתן לבקש מהתלמידים לענות לשאלה של קובי: "איפה אתה רואה $3x$ בסרטוט?".

בתרגילים 27 - 28 אורכי הצלעות של המלבן הם גורמי המכפלה. הסכום של שטחי ארבעת המלבנים הוא שטח המלבן הגדול, כלומר מכפלת שני הגורמים הנתונים. בתרגיל 23 הגורמים הם מספרים. בתרגיל 24 הגורמים הם ביטויים אלגבריים.

<u>לומדים</u>

החלק השני של השיעור דן בשימוש בחוק הפילוג המורחב על-ידי טבלאות. לשיטה זו כמה יתרונות:
- היא אינה דורשת סרטוטים;
- היא בכל זאת "מזכירה" את הייצוגים שנלמדו בחלק הראשון של השיעור;
- היא עוזרת לתלמידים לכתוב את סימני ה"מינוס" בצורה נכונה בביטויים המבוקשים.

<u>מתרגלים</u>

בתרגילים 29 - 31 יש לפתוח את הסוגריים על-ידי חוק הפילוג המורחב. תלמידים חזקים אינם מוכרחים להיעזר בטבלת כפל.

30. א) $2x^2+5x+2$ ב) $3x^2+19x+20$ ג) $40x^2+22x+3$ ד) $12x^2+28x+8$

<u>לומדים</u>

החלק האחרון של השיעור דן בשימוש בחוק הפילוג ללא ייצוגים כלל. כמובן התלמידים (והמורה!) יוכלו להיעזר בייצוגים שנלמדו קודם, לפי הצורך.

<u>מתרגלים</u>

בתרגילים **32 - 33** יש לפתוח את הסוגריים על-ידי חוק הפילוג המורחב. תלמידים חלשים יכולים להיעזר בטבלת כפל.
בתרגילים **34 - 35** יש להוסיף את הסימנים המתאימים כדי שהשוויון יתקיים.

36. יש לפתוח את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב, לשים לב לסימנים. ולכנס איברים דומים.
37. גד פתח נכון את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב. לפי חוק הסימנים בכפל של מספרים מכוונים, כאשר כופלים שני מספרים שסימנם שלילי, סימן התוצאה הוא חיובי. אפשר לכתוב את הביטוי גם כך: $-1(x+4)\cdot-1(1+2x)$. לפי חוק החילוף בכפל, נקבל $-1\cdot(-1)\cdot(x+4)(1+2x)$. $-1\cdot(-1)=1$. בביטוי האחרון יש רק סימנים חיוביים.

בתרגילים **38 - 42** יש לפתוח את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב, לשים לב לסימנים. ולכנס איברים דומים.

43. כדי להוכיח את השוויון יש לפתוח את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב ולכנס את האיברים הדומים. לעתים יש להפעיל כמה פעמים את חוק החילוף בכפל ובחיבור.

א) $(3x-4)(4x-3)=3x \cdot 4x-3x \cdot 3-4 \cdot 4x+4 \cdot 3=12x^2-9x-16x+12=12+12x^2-25x$.

ד) את הביטוי $(15-3x)$ אפשר לכתוב כך: $-3(-5+x)=-3(x-5)$. נקבל $(x-5)(-3)\cdot(x-2)$. לפי חוק הקיבוץ בכפל, נכפול תחילה את הביטוי שבסוגריים השמאליים ב- 3-. נפתח את הסוגריים לפי חוק הפילוג, ונקבל $(-3x+6)$. על-ידי שימוש חוזר בחוק החילוף בחיבור ובכפל נקבל שאגף שמאל הוא $(x-5)(6-3x)$.

ו) באגף שמאל אפשר לכפול תחילה את הביטוי שבסוגריים השמאליים ב-2 ואחר-כך לכפול הביטוי שבסוגריים הימניים לפי חוק הפילוג המורחב. אפשר גם לכפול תחילה את הביטויים שבשני הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב ואת התוצאה לכפול ב-2. **יש לשים לב** לא לכפול ב-2 את שני הביטויים בסוגריים.

44. יש לפתוח את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב, להשתמש בחוק החילוף בכפל ובחיבור ולכנס את האיברים הדומים. סעיפים א - ג הם למעשה נוסחאות הכפל המקוצר.

ג. <u>פתרון משוואות ושאלות מילוליות</u>, עמ' 365

מגלים

מטרת פעילויות אלה כפולה: א) להראות לתלמידים שאכן ניתן להשתמש בחוק הפילוג המורחב כדי לתרגם נתונים מילוליים מחיי היום-יום לשפה מתמטית; ב) להראות כי ניתן להשתמש בחוק הפילוג המורחב כשלב בפתרון משוואה.

לומדים

באופן כללי השימוש בחוק הפילוג יכול להיות שלב בתהליך הפתירה של מגוון משוואות ריבועיות. התלמידים, שטרם למדו לפתור משוואה ריבועית במקרה הכללי, יכולים להשתמש בחוק הפילוג בכדי לפתור שני סוגים של משוואות בהם מופיעים איברים מהסוג $\boldsymbol{ax}^2$ ו- $\boldsymbol{ax}$ ביחד:

- משוואות מהסוג $(\boldsymbol{x}+1)(\boldsymbol{x}+2)=\boldsymbol{x}^2+8$, בהן האיברים $\boldsymbol{x}^2$ יתבטלו לאחר שימוש בחוק הפילוג ובידוד הנעלם באחד האגפים (במילים אחרות המשוואה הנתונה היא בעצם משוואה ממעלה ראשונה).

- משוואות מהסוג $(\boldsymbol{x}+1)(\boldsymbol{x}+2)=3\boldsymbol{x}+6$, בהן האיברים ממעלה ראשונה יתבטלו לאחר שימוש בחוק הפילוג ובידוד הנעלם באחד האגפים: המשוואה שקולה למשוואה מהסוג $\boldsymbol{x}^2=A$. יש לציין כי טעות נפוצה אצל תלמידים היא "שכחה" של הפתרון השלילי של המשוואה $\boldsymbol{x}^2=A$ (אם A הוא חיובי). לכן בשאלות דומות רצוי לשאול באופן סיסטמתי: "כמה פתרונות יש למשוואה $\boldsymbol{x}^2=\ldots$?".

בנוסף, אנו מציגים כיצד להיעזר בייצוג גרפי בצורת מלבן כדי לפתור משוואות מסוג זה. בתרגילים הבאים מומלץ להשתמש בשיטה זו כדי להמחיש את המשוואות הנתונות במקרה הצורך. ברם, אין לעשות כך אם במשוואה נתונה מופיעים סימני מינוס.

מתרגלים

45. המשוואות שקולות. לפי תכונות השוויון אפשר לחסר ביטוי שווה משני אגפי השוויון. מחסרים x^2 משני האגפים.

בתרגילים **46 - 47** יש לפתוח את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב ולכנס את האיברים הדומים. הביטוי המכיל את x^2 מתבטל. לפי תכונות השוויון אפשר לחסר ביטוי שווה משני אגפי השוויון. מחסרים אותו משני האגפים, מקבלים משוואה מהמעלה הראשונה, ואותה יש לפתור בדרכים המקובלות.

48. יש לפתוח את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב ולכנס את האיברים הדומים. מתקבלת משוואה מסוג $ax^2+b=c$. לפי תכונות השוויון, נקבל באגף אחד x^2 ובאגף השני מספר שיש להוציא ממנו שורש. כאשר המספר חיובי, יש שני פתרונות. כאשר המספר שלילי, אין פתרון למשוואה.

למשל בסעיף ד): לפי חוק הפילוג המורחב נקבל $(1-x)(x+2)=x+2-x^2-2x=3-x$. לפי תכונות השוויון נקבל $-x^2-1=0$ או $x^2=-1$. למספר 1- אין שורש, ולכן למשוואה אין פתרון.

49. נסמן את רוחב התמונה המקורית ב- x. אורך התמונה המקורית הוא $2x$. שטח התמונה המקורית הוא $2x^2$. שטח התמונה המוקטנת הוא $(2x-6)(x-3)$. נפחית את השטחים, ונקבל $2x^2-(2x-6)(x-3)=126$. נפתח את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב, ונקבל $12x-18=126$.

לכן $x=12$. מידות התמונה המקורית הן 24×12 ס״מ.

.50 המספר הקודם ל-x הוא $x-1$, והעוקב שלו הוא $x+1$. לכן $(x-1)(x+1)=24$. נקבל $x^2=25$. לאחר הוצאת שורש נקבל $x=5$ או $x=-5$. מאחר ש-x הוא מספר חיובי, התשובה היא רק 5.

.51 יש לפתוח את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב ולכנס את האיברים הדומים. הביטוי המכיל את x^2 מתבטל. לפי תכונות השוויון אפשר לחסר ביטוי שווה משני אגפי השוויון. מחסרים אותו משני האגפים, מקבלים משוואה מהמעלה הראשונה, ואותה יש לפתור בדרכים המקובלות.

.52 ד) לפי חוק הפילוג המורחב נקבל $24x-12x^2-8+4x=40+28x$. לפי תכונות השוויון נקבל $-12x^2-48=0$ או $x^2=-4$. למספר 4- אין שורש, ולכן למשוואה אין פתרון.

.53 יש לפתוח את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב ולכנס את האיברים הדומים. מתקבלת משוואה מסוג $ax^2+b=c$. לפי תכונות השוויון, נקבל באגף אחד x^2 ובאגף השני מספר שיש להוציא ממנו שורש (לכל משוואה שני פתרונות).

.54 א) לפי חוק הפילוג המורחב נקבל $x^2+x/10-10x-1=x^2-10x$. לפי תכונות השוויון נקבל $x/10-1=0$ או $x/10=1$ ולכן $x=10$. ב) לאחר פתיחת הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב יש למצוא מכנה משותף כדי שיהיה אפשר לכנס את האיברים הדומים. נקבל $x^2=3/12$ או $x^2=1/4$, ולכן $x=1/2$ או $x=-1/2$.

.55 נסמן את צלע הריבוע ב-x. שטח המלבן הוא $(x+4)(x+2)$. מאחר ששטח המלבן גדול משטח הריבוע, אפשר להפחית את שטח הריבוע ולקבל את ההפרש. כלומר $(x+4)(x+2)-x^2=38$. נפתח את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב, ונקבל $6x+8=38$. לכן $x=5$. אורך צלע הריבוע הוא 5 ס״מ.

.56 נסמן את צלע הריבוע המקורי ב-x. לכן שטחו x^2. שטח הריבוע הגדול הוא $(x+10)(x+10)$. שטח המלבן המנוקד הוא $20x$. נפחית את השטחים ונקבל $(x+10)(x+10)-20x=424$. נפתח את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב, ונקבל $x^2+100=424$. לכן $x^2=324$ כלומר $x = 18$ (x הוא חיובי). אורך צלע הריבוע המקורי הוא 18 ס״מ.

.57 נסמן את צלע הריבוע ב-x. שטח המלבן הוא $(x-4)(x-2)$. נפחית את שטח המלבן משטח הריבוע, ונקבל $x^2-(x-2)(x-4)=52$. נפתח את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב, ונקבל $6x-8=52$. לכן $x=10$. אורך צלע הריבוע הוא 10 ס״מ.

.58 נסמן את רוחב התמונה המקורית ב-x. אורך התמונה המקורית הוא $1.5x$. שטח התמונה המקורית הוא $1.5x^2$. שטח התמונה המוגדלת הוא $(x+10)(1.5x+15)$. נפחית את השטחים, ונקבל:
$(1.5x+15)(x+10) -1.5x^2 =450$.
נפתח את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב, ונקבל $30x+150=450$. לכן $x = 10$.
א) רוחב התמונה המקורית הוא 10 ס״מ. ב) אורך התמונה המקורית הוא 15 ס״מ. ג) מידות התמונה המוגדלת הן 15×22.5 ס״מ.

ד. <u>הוצאת גורם משותף</u>, עמ׳ 371

<u>מגלים</u>

1. אנו משתמשים כאן בייצוגים בשורת מלבן כדי להדגים את היסוד של הוצאת גורם משותף במקרה פשוט יחסית (הגורם המשותף הוא משתנה). כפי שנעשה בשיעורים הקודמים ניתן יהיה להשתמש בייצוגים דומים לצורך פתרון שאלות מסוימות בהמשך השיעור (גם אם הנתונים אינם דורשים להיעזר בייצוגים אלה).
2. מטרת שאלה זו היא להראות לתלמידים שבמקרים מסוימים יש אפשרות להוציא גורמים משותפים שונים מאותו ביטוי (כאן $\boldsymbol{a}$, $6\boldsymbol{a}$...). בשאלה 6 בפרט אפשר לכתוב:
$6\boldsymbol{ac} + 6\boldsymbol{ab} = 6\cdot(\boldsymbol{ac} + \boldsymbol{ab}) = 2\cdot(3\boldsymbol{ac} + 3\boldsymbol{ab}) = 3\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{b})$ וכו׳

<u>לומדים</u>

אחד הקשיים הבולטים בתרגיל הוצאת גורם משותף היא... מציאת הגורם המשותף. שלוש הסיבות העיקריות לכך הן:
- התלמידים אינם תמיד מודעים לכך שגורם משותף יכול להיות איבר חופשי, משתנה, או ביטוי אלגברי מורכב יותר (מכפלה, סכום).
- מציאת הגורם המשותף דורשת פירוק ביטויים לגורמים ובחירת הגורם המתאים ביותר מתוך מספר אפשרויות. לדוגמה: אם נתון הביטוי $2\boldsymbol{xy} + 2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{xyz}$ יש מקום להסס האם המספרים 2 ו- $\boldsymbol{y}$ שייכים לגורם המשותף.

- בהרבה מקרים הגורם המשותף אינו מופיע "בפירוש" בביטוי הנתון. לדוגמה: בביטוי $6\boldsymbol{x} + 9\boldsymbol{y}$ הגורם המשותף (3) אינו מופיע.

בשל כך השתדלנו להציע מגוון דוגמאות למצבים הנ"ל. באופן כללי הניסיון מוכיח שהמודעות לסיטואציות השונות האפשריות היא המפתח להצלחת התלמידים בשיעור זה, מעבר להבנת החוק האלגברי עצמו.
בכל זאת, כדי להקל על התלמידים, בחלק הראשון של השיעור אנו מציעים רק ביטויים בהם הגורם המשותף הוא איבר חופשי או משתנה. מקרים מורכבים יותר יילמדו בהמשך.

מתרגלים

59. א-ד) השוויונות נכונים. משמאל לימין – מוציאים גורם משותף. מימין לשמאל מפעילים את חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור/חיסור. ה) לא-נכון. ו) נכון, כמו בסעיפים א-ד. ז) לא-נכון. ח) נכון.

60. כדאי להוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר האפשרי.

הביטוי	הגורם המשותף	הגורמים הכופלים את הגורם המשותף		הביטוי אחרי הוצאת הגורם המשותף
6x-15	3	5	2x	3(2x+5)
$2x^2$+14x	2x	7	x	2x(x+7)
9x+y·9	9	y	x	9(x+y)
-4x+12	-4 {4}	-3 {3}	x {-x}	-4(x-3) {4(-x+3)}
18x-6	6	-1	3x	6(3x-1)

בשורה הרביעית יש שתי אפשרויות. האפשרות השנייה כתובה בסוגריים { }.

61. הגורם המשותף הוא המספר הקטן מבין המספרים המופיעים בביטוי.

62. הגורם המשותף הוא המספר הקטן מבין המספרים המופיעים בביטוי. מכיוון שגורם זה הוא מחובר בודד, לאחר הוצאת הגורם המשותף מופיע בסוגריים המספר 1, אף על-פי שאינו מופיע בביטוי המקורי.

63. הגורם המשותף הוא מספר שהוא המחלק המשותף הגדול ביותר של המספרים המופיעים בביטוי.
א) 2(2x+3). ב) 5(3-2x). ג) 4(7x-3).

64. הגורם המשותף הוא המשתנה x. רצוי לכתוב בפירוש $x^2 = x \cdot x$ לפי הצורך.

65. שאלה זו דנה במקרים בהם הגורם המשותף (מספרי או אלגברי) מופיע כמחובר בודד. רצוי לשאול את התלמידים: "אילו לא היו נותנים לכם את הביטויים עם סוגריים (כאן $2\cdot(x + 1)$ ו- $y\cdot(2x + 1)$) האם היה לנו איזושהי דרך למצוא אותם? כיצד?"

66. הגורם המשותף הוא המספר הקטן מבין המספרים המופיעים בביטוי. ג) -7(8+x) או 7(-x-8).

67. הגורם המשותף הוא המספר הקטן מבין המספרים המופיעים בביטוי. מכיוון שגורם זה הוא מחובר בודד, לאחר הוצאת הגורם המשותף מופיע בסוגריים המספר 1, אף על-פי שאינו מופיע בביטוי המקורי. ג) -4(1+8x) או 4(-1-8x).

68. הגורם המשותף הוא מספר שהוא המחלק המשותף הגדול ביותר של המספרים המופיעים בביטוי.
א) 2(-5+2x). ב) 7(3x-2). ג) -9(5+3x) או 9(-5-3x)

69. הגורם המשותף הוא משתנה.

הביטוי	הגורם המשותף	הגורמים הכופלים את הגורם המשותף		הביטוי אחרי הוצאת הגורם המשותף
5x+x^2	x	x	5	x (5+x)
x^2-x·8	x	-8	x	x (x-8)
4x^2+5x	x	5	4x	x (4x+5)
Xy+x	x	1	y	x (y+1)

70. הגורם המשותף הוא המשתנה x. רצוי לכתוב בפירוש $x^2 = x \cdot x$ לפי הצורך.

71. א-ד) השוויונות נכונים. כאשר מסתכלים משמאל לימין, מוציאים גורם משותף. כאשר מסתכלים מימין לשמאל, מפעילים את חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור/חיסור. ה) לא-נכון. ו) נכון, כמו בסעיפים א-ד. ז) לא-נכון. ח) נכון.

72. יש להוציא גורם משותף מספרי מכל שלושת האיברים שבביטוי.

לומדים

בחלק זה של השיעור נתייחס לביטויים בהם הגורם המשותף הוא:

- מכפלה בצורה ax או ax^2
- או סכום בצורה $ax + b$.

מתרגלים

73. הגורם המשותף הוא מספר ומשתנה. כדאי להוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר האפשרי.

הביטוי	הגורם המשותף	הגורמים הכופלים את הגורם המשותף		הביטוי אחרי הוצאת הגורם המשותף
$2x^2-8x$	$2x$	-4	x	$2x(x-4)$
$6x^2-18x$	$6x$	-3	x	$6x(x-3)$
$21x^2-6x$	$3x$	-2	$7x$	$3x(7x-2)$
$12x-4x^2$	$4x$	$-x$	3	$4x(3-x)$
$12x-16x^2$	$4x$	$-4x$	3	$-4x(3-4x)$

74. הגורם המשותף הוא מספר ומשתנה. כדאי להוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר האפשרי. יש לשים לב לכך שאם התלמידים לא מוצאים את גורם זה "במכה אחת", הם יכולים להוציא אותו בשני שלבים כמתואר בדוגמה.

75. הגורם המשותף הוא מספר ומשתנה. כדאי להוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר האפשרי.

76. כדי להתאים בין הביטויים השקולים אפשר להוציא גורם משותף מהביטויים א-ד ולהשוות ביניהם לבין הביטויים 1-4. אפשר גם לפתוח סוגריים לפי חוק הפילוג בביטויים 1-4 ולהשוות בין התוצאות לבין הביטויים א-ד. יש לשים לב לסימנים.

א) 2. ב) 1. ג) 4. ד) 3.

77. הגורם המשותף הוא בצורה ax או ax^2.

78. הגורם המשותף הוא מספר ומשתנה. כדאי להוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר האפשרי.

79. הגורם המשותף הוא בצורה ax או ax^2.

80. יש להוציא גורם משותף מכל שלושת האיברים שבביטוי.

בתרגילים **81 - 82** הגורם המשותף הוא ביטוי אלגברי.

83. כדי להוציא גורם משותף יש שני שלבים. בשלב הראשון מוציאים גורם משותף (מספר) מאחד הביטויים שבסוגריים. בשלב השני הגורם המשותף הוא אחד הביטויים שבסוגריים.

א) $x(x-4)+2(x-4)=(x-4)(x+2)$.
ב) $11x(x+1)+6(x+1)=(x+1)(11x+6)$.
ג) $3(5-x)+3x(5-x)=(5-x)(3+3x)$.
ד) $3(9+7x)-(9+3x)2x=(9+7x)(3-2x)$.
ה) $6(x-4)+x(x-4)=(x-4)(6+x)$.
ו) $(1-8x)-5\cdot3(1-8x)=(1-8x)(x-15)$.
ז) $4(x^2+4x)-(x^2+4x)=(x^2+4x)(4-1)$.
ח) $5x(3-x)-4(3-x)=(3-x)(5x-4)$.

ה. צמצום ביטויים, עמ' 381

מגלים

1. שאלה זו נותנת לתלמידים הזדמנות להיזכר במושג *תחום הגדרה של ביטוי*. יש להזכיר לתלמידים שמושג זה רלוונטי לאו דווקא בנושא פתרון משוואות, אלא באופן כללי הרבה יותר כאשר מתייחסים לביטוי אלגברי כלשהו.

2. בבית הספר היסודי למדו התלמידים לצמצם שברים מספריים. בכל זאת צמצום שברים אינו שלב הכרחי לפתרון שאלה הקשורה לשברים. לדוגמה: אם תלמיד כותב $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{30}$ ולא $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$ הוא אכן מסתבך באופן מסוים, אך בדרך כלל לא בצורה מוגזמת; אם הוא צריך להשתמש בתשובתו לצורך פתרון שאלה אחרת, הוא יכול "להסתדר". בניגוד לכך צמצום של שברים אלגבריים מקל על החישובים באופן הרבה יותר משמעותי, ולהפך, אי-ביצוע של צמצום בשבר אלגברי שניתן לצמצום מהווה לעתים קרובות מכשול מוחלט המונע מהתלמיד לענות על השאלה הנתונה בזמן המוקצב.

מסיבה זו הראינו לתלמידים עד כמה צמצום שבר אלגברי (כאן $\frac{2x^2+4}{x+2}=2x$) יכול להפוך ביטוי מורכב לביטוי הרבה יותר פשוט וקריא.
בסעיפים א׳-ב׳ התלמידים ״חשים״ על-ידי הצבה כי שני הביטויים הנתונים הם שווים.
בסעיפים ג׳-ד׳-ה׳ הכוונה היא להראות כי במקרה של שימוש בחוק הפילוג לצורך צמצום יש לבחור בזהירות את הגורם המשותף: אם מוציאים 2 או x במקום $2x$ בביטוי $2x^2+4$, לא ניתן לצמצם (מיד) את השבר הנתון. כמובן יש לציין שאם מישהו ״טעה״ ולא הוציא את הגורם המשותף הנכון הוא יכול להוציא גורם אחר כדי לקבל ביטוי שניתן לצמצם.
סעיף ו׳ חוזר על עניין תחום הצבה.

לומדים

הניסיון מוכיח שהתלמידים לא תמיד יודעים לצמצם שברים אלגבריים באופן **שיטתי**. לכן כתבנו דרך כללית לצמצום שברים, אליה מומלץ להתייחס בהמשך במקרה של קשיים אצל התלמידים: שאלות כגון ״האם רואים אותו גורם במונה ובמכנה?״, ״האם ניתן להוציא גורם משותף במונה?״, ״האם ניתן להוציא גורם משותף במונה?״, בדרך כלל מועילות לתלמידים למצוא את הפתרון המבוקש.
לאחר מכן פירטנו את המקרים האפשריים בחלקים השונים של השיעור: כך בחלק הראשון התייחסנו לצמצום שברים על-ידי כתיבת חזקות כמכפלת גורמים שווים.

לדוגמה:

$$\frac{6x}{x^2}=\frac{6x}{x\cdot x}=\frac{6}{x}$$

צמצום ב-x $(x\neq 0)$

השתדלנו לתת דוגמאות רלוונטיות לטעויות הנפוצות ביותר אצל התלמידים בנושא צמצומים. רצוי לחזור לדוגמאות אלה במקרה של טעויות דומות בתרגילים הבאים.

מתרגלים

84. המשתנה מצטמצם. נותר מספר ללא משתנה. בסעיפים ב׳ ו-ד׳ יש לשים לב לסימן.
85. אין צורך לפתוח את הביטויים בסוגריים. הסוגריים מצטמצמים. בסעיף ב׳ יש לשים לב לסימן.
86. שגיאה נפוצה היא צמצום שגוי. כאשר יש פעולות חיבור/חיסור במונה או במכנה. יש להזכיר שקו שבר דינו כדין סוגריים. א) נכון. צמצום המשתנה. ב) לא-נכון. אסור לצמצם את המשתנה בגלל פעולת החיבור במונה ובמכנה, הקודמת לפעולת החילוק. ג) לא-נכון. ד) לא-נכון. דומה לסעיף ב׳. ה) נכון. צמצום הסוגריים. ו) לא-נכון. הכפל במונה קודם לצמצום. ז) לא-נכון. פעולת החזקה במונה קודמת לצמצום. ח) נכון. יש להוציא גורם משותף במונה, יתקבל במונה $x(1+x)$.
87. כדאי לכתוב את החזקה כפעולת כפל של הגורם בעצמו ולצמצם. התלמידים לא למדו עדיין את חוקי החזקות. אפשר לבקש מתלמידים מתקדמים לנסות לנסח כמסקנה את חוק החילוק של חזקות שבסיסן שווה.
88. תמרה צודקת. הביטויים שבסוגריים במונה ובמכנה שווים. (אפשר ״לסדר״ את הביטוי שבמכנה לפי חוק החילוף.)
89. הביטויים שבסוגריים במונה ובמכנה שווים. (אפשר ״לסדר״ את הביטוי שבמכנה לפי חוק החילוף.)
90. רותם צודקת. הביטוי בסוגריים שבמונה הוא נגדי לביטוי בסוגריים שבמכנה. אפשר לכפול אחד מהביטויים ב-1- ויתקבלו בסוגריים ביטויים זהים, ואפשר יהיה לצמצם אותם.
91. הביטוי בסוגריים שבמונה הוא נגדי לביטוי בסוגריים שבמכנה. אפשר לכפול אחד מהביטויים ב-1-, וכך יתקבלו ביטויים זהים בסוגריים ואפשר יהיה לצמצם אותם. לאחר הצמצום ייוותרו הביטויים שמחוץ לסוגריים בסימן -.

לומדים

צמצום שברים אלגבריים דורש לעיתים קרובות הוצאת גורם משותף מהמונה ו/או מהמכנה. מעבר לכך צמצום שברים דומה להוצאת גורם משותף בכך שהתלמידים אינם תמיד מודעים לכך שהגורם בו ניתן לצמצם שבר אלגברי נתון יכול להיות איבר חופשי, משתנה, או ביטוי אלגברי מורכב יותר (מכפלה, סכום). בנוסף, גורם זה אינו מופיע תמיד בפירוש בביטוי הנתון. בשל כך כתבנו מספר דוגמאות המשקפות את המקרים המצויים ביותר בנושא.
הערה: צמצום שברים על-ידי הוצאת גורם משותף הוא נושא קשה למדי עבור הרבה תלמידים. לכן בשלב זה החלטנו לא להתייחס לשאלה: ״עבור אילו ערכים של המשתנה הצמצומים שאנו מבצעים תקפים?״ נדון בשאלה זו בחלק האחרון של השיעור.

מתרגלים

.92 יש להוציא גורם משותף במונה או במכנה כמו בדוגמה, ואחר-כך לצמצם. בסעיפים א-ד הגורם המשותף הוא x. בסעיף ה׳ הגורם המשותף הוא $2x$. בסעיפים ו-ז הגורם המשותף הוא x. ח) הגורם המשותף הוא x^2. במכנה נקבל $x^2(5+2x)$.

.93 יש להוציא גורם משותף במונה וגם במכנה. בסעיפים א-ג הגורם המשותף הוא x. בסעיף ד׳ הגורם המשותף הוא x^2.

.94 אפשר להוציא גורם משותף בשני שלבים: תחילה מספר ואחר-כך משתנה. אפשר להוציא בשלב אחד את הגורם הגדול ביותר, כלומר גם מספר וגם משתנה. יש תלמידים שקל להם יותר לעבוד בשלבים, לפחות בהתחלה.

.95 לאחר שהתנסו בתרגיל 94 בשתי הדרכים, בתרגיל זה יבחר כל תלמיד את הדרך הנוחה לו.

.96 א) $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot(x+2)}{5\cdot(x+2)}$. ב) $x=\frac{x(x+3)}{x+3}$ ג) $\frac{2x}{3}=\frac{2x(3-x^2)}{3(3-x^2)}$. ד) $-\frac{1}{x}=-\frac{7x+2}{x(7x+2)}$.
ה) $\frac{8}{x}=\frac{8(2-x)}{x(2-x)}$. ו) $-\frac{3}{x}=-\frac{3(6x+1)}{x(6x+1)}$.

.97 א) $\frac{1}{2x}=\frac{x+1}{2x(x+1)}$. ב) $\frac{5x}{2}=\frac{5x(3x-1)}{2(3x-1)}$. ג) $\frac{2x}{3}=\frac{2x(3-4x^2)}{3(3-4x^2)}$. ד) $\frac{1}{x}=\frac{x-7}{x(-7+x)}$
ה) $\frac{x}{4}=\frac{x(x+8)}{4(8+x)}$. ו) $-\frac{9}{5x}=-\frac{9(1+2x)}{5x(2x+1)}$.

לומדים

החלק האחרון של השיעור דן בשאלה: ״עבור אילו ערכים של המשתנה הצמצומים שאנו מבצעים על שבר אלגברי תקפים?״. התשובה לשאלה זו היא: עבור הערכים של המשתנה השייכים לתחום ההצבה של השבר הנתון. נזכיר שנושא קביעת תחום ההצבה של ביטוי או של משוואה כבר נלמד בפרקים קודמים. לכן בתחילת השיעור ניתן לחזור בקצרה על דוגמאות שנלמדו בפרקים אלו. בנוסף נציין כי המושג קביעת תחום הצבה של שברים אלגבריים ישמש לתלמידים בשיעור הבא, בו נדון (בין השאר) פתרון משוואות מהסוג $\frac{A}{B}=0$.

מתרגלים

.98 לימור אינה צודקת. הביטויים שקולים רק כאשר $x \neq 0$. כאשר $x=0$, אי-אפשר לצמצם ב-x.

.99 א) תחום הצבה: $x \neq \frac{1}{2}$. $\frac{1}{6}=\frac{2x-1}{6(2x-1)}$. ב) תחום הצבה: $x \neq -\frac{5}{4}$. $\frac{2+x}{5+4x}=\frac{4(2+x)}{4(5+4x)}$.
ז) תחום הצבה: $x \neq -\frac{3}{7}$. $\frac{2x}{7}=\frac{2x(7x+3)}{7(3+7x)}$. ח) תחום הצבה: $x \neq \pm 2$. $x=\frac{x(x^2-4)}{x^2-4}$.

.100 בסעיפים ב׳, ד׳ ו-ז׳ אי-אפשר לצמצם. ו) תחום הצבה: $x \neq 0$. $-\frac{8x-7}{6}=\frac{4x(8x-7)}{-24x}$.

.101 אפשר לצמצם את הביטוי ב-$2x$. כאשר $x \neq 0$, תתקבל הפונקציה $y=\frac{1}{x}$, המתארת יחס הפוך. (פרק י״ב).

.102 א) למשוואה אין פתרון. x^2 לא יכול להיות שלילי. לכן x^2+1 תמיד גדול מ- 1. כתוצאה מכך הוא תמיד מספר חיובי ולא יכול להיות 0. ב) גדעון צודק. בסעיף א׳ ראינו שהמכנה תמיד חיובי, ולכן אפשר לצמצם. $\frac{2x(x^2+1)}{x^2+1}=2x$. קיבלנו $y=2x$. הייצוג הגרפי הוא קו ישר.

ו. <u>פתרון משוואות</u>, עמ' 388

<u>**מגלים**</u>

1. עד כה כאשר פתרו התלמידים משוואות עם סוגריים, הם תמיד פתחו אותן. לכן פתירת משוואה כגון $5\cdot(3x - 18) = 0$, ללא פתיחת סוגריים, אינה אינטואיטיבית כלל עבורם. בשל כך יש להראות להם כי קיימת דרך אחרת על-ידי דוגמה פשוטה יותר ($5 \cdot ? = 0$).

2. א-ב-ג. סעיפים אלה מביאים את התלמידים לגלות את הכלל: "אם מכפלת גורמים שווה ל- 0, אחד הגורמים (לפחות) שווה ל- 0.".

ד. בשאלה 1 ראו התלמידים כי פתיחת הסוגריים במשוואה אינה תנאי הכרחי למציאת פתרונה. כאן הם יגלו כי מעבר לכך פתיחת הסוגריים יכולה אפילו למנוע מהם למצוא את הפתרון אם היא מביאה אותם לכתוב משוואה ריבועית איתה אינם מסוגלים להתמודד (לפחות עם הכלים שברשותם כעת).

ה. כאן התלמידים נוכחים לדעת כי בדיקת הפתרון במשוואה כגון $(x + 2)\cdot(x + 1) = 0$ מורכבת יותר מבדיקת הפתרון במשוואה ממעלה ראשונה: מכיוון שישנם שני פתרונות (2- ו- 1-), יש לבדוק **בנפרד** את שניהם.

<u>**לומדים**</u>

בחלק הראשון של השיעור אנו חוזרים על העקרונות שנראו בפעילויות הגילוי על משוואות שבצורת מכפלת גורמים השווה ל- 0. ניתן לסכם את הנלמד בארבע נקודות:

- אין לפתוח סוגריים כאשר פותרים משוואה מסוג זה.
- אם מכפלת גורמים שווה ל- 0, אחד הגורמים (לפחות) שווה ל- 0.
- למשוואה מהסוג הנ"ל יש בדרך כלל יותר מפתרון אחד.
- יש לבדוק את כל פתרונות אלה בנפרד.

<u>**מתרגלים**</u>

103. אפשר להציב את הפתרונות במשוואות השונות ולראות היכן מתקבל שוויון נכון. אפשר גם לפתור את המשוואות. אין צורך לפתוח את הסוגריים. (בפתיחת סוגריים תתקבל משוואה ריבועית, שהתלמידים עדיין לא למדו לפתור.) מאחר שהמכפלה שווה ל-0, אחד הגורמים לפחות שווה ל-0, לכן אפשר להשוות כל גורם במשוואה ל-0 ולפתור.

104. יש להשוות ביטוי בכל סוגריים ל-0. בסעיף ו' יש לפתור $4x=0$ וגם $5x-20=0$. בסעיפים ט' ו-י' יש שלושה גורמים. יש להשוות בין כל אחד מהם ל-0, ולכן יש שלושה פתרונות.

105. דוד צודק. יש פתרון נוסף. כדי לפתור את המשוואה אפשר להוציא גורם משותף. נקבל $x(x+1)=0$. נשווה בין כל אחד מהגורמים ל-0. נקבל $x=0$ וגם $x+1=0 \Rightarrow x=-1$. שני הפתרונות הם 0 ו-1-.

106. בכל הסעיפים אפשר להוציא x כגורם משותף (בסעיפים ה-ח הגורם המשותף הוא מהסוג ax), לכן אחד הפתרונות הוא $x=0$. הפתרון הנוסף מתקבל על-ידי השוואה בין הגורם הנוסף (הסוגריים), ל-0.

107. תחילה יש להוציא גורם משותף כדי לקבל מכפלה של שני גורמים (שני סוגריים) השווה ל-0, אחר-כך יש להשוות בין כל אחד מהביטויים שבסוגריים ל-0, כדי למצוא את הפתרונות(ות).

א) $(x-1)(12+3)=0 \Rightarrow (x-1)\cdot 15=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$. יש רק פתרון אחד, משום ש- $15 \neq 0$.

ב) $(x+2)(x-5)=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$ וגם $x-5=0 \Rightarrow x=5$.

ה) $(15-5x)(-x+1)=0 \Rightarrow 15-5x=0 \Rightarrow x=3$ וגם $-x+1=0 \Rightarrow x=1$.

ו) $(x-9)(x+3x)=0 \Rightarrow x-9=0 \Rightarrow x=9$ וגם $x+3x=0 \Rightarrow 4x=0 \Rightarrow x=0$.

ח) $(2-x)(3-x)=0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2$ וגם $3-x=0 \Rightarrow x=3$.

108. נסמן את אורך השדה ב-x. שטח השדה (מספר המ"ר) הוא x^2, ולכן מחיר הזרעים הוא $0.4x^2$. אורך הגדר הוא היקף השדה, כלומר $4x$, מחיר הגדר הוא $10\cdot 4x=40x$. מאחר שמחיר הזרעים שווה למחיר הגדר, נקבל $0.4x^2=40x$. אפשר לכתוב את המשוואה כך: $0.4x^2-40x=0$. לאחר הוצאת גורם משותף נקבל $x(0.4x-40)=0$. למשוואה יש שני פתרונות $x=0$ ו $x=100$. הפתרון $x=0$ אינו מתאים לבעיה (אין שדה), לכן אורך השדה הוא 100 מ'.

109. תרגיל חזרה על פתרון משוואות ממעלה ראשונה. יש לציין שחלק מהתלמידים עלולים להתבלבל ולהסיק שפתרון המשוואה $2x = 0$ הוא $x = -2$.

110. יש להציב את הפתרונות הנתונים במשוואה ולוודא שמתקבל שוויון המתקיים.

111. מרים צודקת. יש רק פתרון אחד והוא $x=3$. מאחר שהמכפלה שווה ל-0, אחד הגורמים לפחות שווה ל-0, לכן יש לפתור $x-3=0 \Rightarrow x=3$. וגם $12-4x=0 \Rightarrow x=3$.

בתרגילים **112 - 113** אפשר להוציא כגורם משותף את x או ביטוי מהסוג ax. אחד הפתרונות הוא $x=0$. הפתרון הנוסף מתקבל על-ידי השוואת הגורם הנוסף (הסוגריים), ל-0.

114. הגורם המשותף הוא ביטוי בצורה $ax + b$.

115. א) $(4x-1)(13+7)=0 \Rightarrow 4x-1=0 \Rightarrow x=1/4$. יש רק פתרון אחד. משום ש- $20 \neq 0$.

ב) $(2x+1)(6-x)=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-1/2$ וגם $6-x=0 \Rightarrow x=6$.

ו) $(4x-6)(-x+5)=0 \Rightarrow 4x-6=0 \Rightarrow x=1.5$ וגם $-x+5=0 \Rightarrow x=5$.

ח) $(-6+2x)(3-7x)=0 \Rightarrow -6+2x=0 \Rightarrow x=3$ וגם $3-7x=0 \Rightarrow x=3/7$.

116. תחילה יש להוציא גורם משותף מאחד מהסוגריים ואחר-כך להמשיך כמו בתרגילים הקודמים.

א) $x(x+3)+2(x+3)=(x+3)(x+2) \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$ וגם $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

ב) $5x(x-2)+5(x-2)=(x-2)(5x+5) \Rightarrow x=2$ וגם $x=-1$.

ג) $4(3-x)+2x(3-x)=(3-x)(4+2x) \Rightarrow x=3$ וגם $x=-2$.

ד) $3(6+2x)-(6+2x)8x=(6+2x)(3-8x) \Rightarrow x=-3$ וגם $x=3/8$.

ה) $8(x-6)+x(x-6)=(x-6)(8+x) \Rightarrow x=6$ וגם $x=-8$.

ו) $(2-3x)x-7\cdot4(2-3x)=(2-3x)(x-28) \Rightarrow x=2/3$ וגם $x=28$.

ז) $5(x^2+5x)-(x^2+5x)=(x^2+5x)(5-1)=(x^2+5x)\cdot4 \Rightarrow x^2+5x=x(x+5)=0 \Rightarrow x=0$ וגם $x=-5$.

אפשרות אחרת: $5x(x+5)-x(x+5)=(x+5)(5x-x)=(x+5)4x \Rightarrow 4x=0 \Rightarrow x=0$ וגם $x+5=0 \Rightarrow x=-5$.

ח) $x(4-x)-2(4-x)=(4-x)(x-2) \Rightarrow 4-x=0 \Rightarrow x=4$ וגם $x-2=0 \Rightarrow x=2$.

לומדים

בחלק השני של השיעור דנים במשוואות שבצורת שבר השווה ל- 0. ההבדל המשמעותי לבין משוואות מסוג זה לבין המשוואות בהן דנו לעיל הוא שכאשר פותרים משוואה מהצורה $\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}=0$ יש להקפיד על הבדיקות הקשורות לתחום ההצבה, כדי לוודא שהמספרים בהם מתאפס המונה אינם גורמים למכנה להתאפס. יש לצפות שחלק מהתלמידים יתבלבלו בין "מונה" לבין "מכנה" בהקשר זה.

מתרגלים

בתרגילים **117 - 121** אפשר למצוא תחילה את תחום ההצבה ואחר-כך לפתור את המשוואה. אפשר לפתור תחילה את המשוואה ואחר-כך לוודא שהפתרון נמצא בתחום ההצבה. מאחר שהמכנה שונה מ-0, אפשר לכפול את שני האגפים במכנה (פעולה הפוכה או תכונת השוויון), ונקבל שהמונה שווה ל-0. התלמידים כבר למדו לפתור משוואה כזו.

117. א) תחום ההצבה: $x \neq -1$., $6+x=0 \Rightarrow x=-6$.

ב) תחום ההצבה: $x \neq 2$., $8x-16=0$ הפתרון $x=2$. מאחר שהמספר 2 אינו בתחום ההצבה, למשוואה אין פתרון.

ג) תחום ההצבה: $x \neq 1$., $2-2x=0$ הפתרון $x=1$. מאחר שהמספר 1 אינו בתחום ההצבה, למשוואה אין פתרון.

ד) תחום ההצבה: $x \neq 0$, $x^2+6x=0$. $x(x+6)=0 \Rightarrow x=0$ וגם $x+6=0 \Rightarrow x=-6$. המספר 0 אינו בתחום ההצבה, ולכן הפתרון היחיד הוא $x=-6$.

118. א) תחום ההצבה: $x \neq -7/5$, $5x^2+7x=0 \Rightarrow x(5x+7)=0 \Rightarrow x=0$ וגם $5x+7=0 \Rightarrow x=-7/5$. מספר זה אינו בתחום ההצבה, ולכן הפתרון היחיד הוא $x=0$.

ב) תחום ההצבה: $x \neq 8/3$, $3x-8x^2=0 \Rightarrow x(3-8x)=0 \Rightarrow x=0$ וגם $3-8x=0 \Rightarrow x=3/8$.

ג) תחום ההצבה: $x \neq 0$, $2x^2-7x=0 \Rightarrow x(2x-7)=0 \Rightarrow x=0$ וגם $2x-7=0 \Rightarrow x=7/2$. המספר 0 אינו בתחום ההצבה, ולכן הפתרון היחיד הוא $x=7/2$.

119. א) תחום ההצבה: $x \neq -2$. $2x^2+2x=0 \Rightarrow 2x(x+1)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$ וגם $x+1=0 \Rightarrow x=-1$.

ב) תחום ההצבה: $x \neq 1$., $x-x^2=0 \Rightarrow x(1-x)=0 \Rightarrow x=0$ וגם $1-x=0 \Rightarrow x=1$. המספר 1 אינו בתחום ההצבה, ולכן הפתרון היחיד הוא $x=0$.

ג) תחום ההצבה: $x \neq -7$, $7x+x^2=0 \Rightarrow x(7+x)=0 \Rightarrow x=0$ וגם $7+x=0 \Rightarrow x=-7$. המספר 7- אינו בתחום ההצבה, ולכן הפתרון היחיד הוא $x=0$.

ד) תחום ההצבה: $x \neq -9$, $45x+5x^2=0 \Rightarrow 5x(9-x)=0 \Rightarrow 5x=0 \Rightarrow x=0$ וגם $9-x=0 \Rightarrow x=-9$. המספר 9- אינו בתחום ההצבה, ולכן הפתרון היחיד הוא $x=0$.

120. א) תחום ההצבה: $x \neq -30$. $12x^2+30x=0 \Leftarrow 6x(2x+5)=0 \Leftarrow 6x=0 \Leftarrow x=0$ וגם $2x+5=0 \Leftarrow x=-5/2$.
ב) תחום ההצבה: $x \neq 0$. $x+9x^2=0 \Leftarrow x(1+9x)=0 \Leftarrow x=0$ וגם $1+9x=0 \Leftarrow x=-1/9$. המספר 0 אינו בתחום ההצבה, ולכן הפתרון היחיד הוא $x=-1/9$.
ג) תחום ההצבה: $x \neq -1/9, 0$. $9x-8x^2=0 \Leftarrow x(9-8x)=0 \Leftarrow x=0$ וגם $9-8x=0 \Leftarrow x=9/8$.

121. א) תחום ההצבה: $x \neq -1$. $x(x+1)+2(x+1)=(x+1)(x+2)=0 \Leftarrow x+1=0 \Leftarrow x=-1$ וגם $x+2=0 \Leftarrow x=-2$. המספר 1- אינו בתחום ההצבה, ולכן הפתרון היחיד הוא $x=-2$.
ב) תחום ההצבה: $x \neq 5$. $x(3x-6)-5(3x-6)=(3x-6)(x-5)=0 \Leftarrow 3x-6=0 \Leftarrow x=2$ וגם $x-5=0 \Leftarrow x=5$ מספר זה אינו בתחום ההצבה, ולכן הפתרון היחיד הוא $x=2$.
ג) תחום ההצבה: $x \neq 9$. $9(5x-8)-(5x-8)x=(5x-8)(9-x)=0 \Leftarrow 5x-8=0 \Leftarrow x=8/5$ וגם $9-x=0 \Leftarrow x=9$ מספר זה אינו בתחום ההצבה, ולכן הפתרון היחיד הוא $x=8/5$.

מיומנויות, עמ' 396

בשני עמודים אלה דנים בקשיים הקשורים לשימוש בחוק הפילוג על ביטוי בו מופיעים סימני מינוס, הן לצורך פתיחת סוגריים והן לצורך הוצאת גורם משותף.

מוכנים להמשיך? עמ' 398

1. ב)   2. א)   3. ג)   4. ב)   5. א)   6. ג)   7. ג)   8. א)   9. ב)   10. ג)   11. א)

ממשיכים בתרגול, עמ' 399

122. $(5+3)(5+2) = 5\cdot5 + 5\cdot2 + 3\cdot5 + 3\cdot2$. הסכום $5\cdot5 + 5\cdot2 + 3\cdot5 + 3\cdot2$ אכן שווה ל- 56.
123. $(5-3)(5-2) = 5\cdot5 - 5\cdot2 - 3\cdot5 + 3\cdot2$. הביטוי $5\cdot5 - 5\cdot2 - 3\cdot5 + 3\cdot2$ אכן שווה ל- 6.
124. ניצן צודק: $(x-3)(x+2) = x^2 + 2x - 3x - 3\cdot2 = x^2 - x - 6$.
בתרגילים **125 - 126** נעזרים בחוק הפילוג המורחב כדי לפתור בקלות תרגילי כפל. חלק מהתרגילים אפשר לפתור אפילו בעל-פה.
125. א) $(100+2)(100+2)= 100\cdot100+100\cdot2+2\cdot100+2\cdot2=10,404$.   ד) $(100+9)(100+9)=11,881$.
126. א) $(30-1)(30-1)=30\cdot30-30\cdot1-1\cdot30+1\cdot1=841$. ו) $(1000-5)(1000-5)=990,025$.
127. א) בצלע לוח השחמט 8 משבצות וכן שוליים של 3 ס"מ בכל צד. לכן אורך הלוח הוא $8x+6$.
ב) שטח הלוח הוא $(8x+6)(8x+6)$ או $64x^2+96x+36$.
ג) $(8x+6)(8x+6)=(8x+6)^2=900$. לפי תכונת השוויון אפשר להוציא שורש ריבועי משני האגפים.
נקבל: $8x+6=30 \Leftarrow x=3$. אורך כל משבצת 3 ס"מ.
128. א) $2x+6$. ב) רוחב המגרש הוא $x+6$. ג) שטח המגרש הוא $(2x+6)(x+6)$ או $2x^2+18x+36$.
ד) שטח המשחק $2x\cdot x=2x^2$. מאחר שהשטח הכולל גדול משטח המשחק נקבל $(2x+6)(x+6)$- $2x^2=1,116$. פתרון המשוואה הוא $x=60$. רוחב המגרש 60 מ' רוחבו 120 מ'. שטח המגרש הוא 8316 מ"ר.
129. א) מאחר שצלעות המלבן מקבילות לצירים, ידיעת השיעורים של חלק מהנקודות מאפשרת למצוא את שיעורי הנקודות האחרות.
1. הנקודה J נמצאת על הישר KJ המקביל לציר ה-X, וכן שיעור ה-y שלה זהה לשיעור ה-y של הנקודה K. כמו-כן נמצאת הנקודה J על הישר MJ המקביל לציר ה-Y, ולכן שיעור ה-x שלה זהה לשיעור ה-x של הנקודה M: $J(x,-2)$. באופן דומה נמצא את שיעורי הנקודה L: $L(-1,y)$.
2. כדי למצוא אורך קטע המקביל לציר ה-X, יש לחשב את הפרש שיעורי ה-x של הנקודות, וכמו-כן אורך קטע המקביל לציר ה-Y הוא הפרש שיעורי ה-y של הנקודות. $JK = x + 1$, $KL = y + 2$, $LM = x + 1$, $MJ = y + 2$.
3. שטח מלבן הוא מכפלת זוג צלעות סמוכות $S=(x+1)(y+2)$ או $S=xy+2x+y+2$ (חוק הפילוג המורחב.

ב) כאשר $x=y$, יש להציב x במקום y. נקבל:

1. שיעורי הנקודות הם $J(x,-2)$, $L(-1,x)$.
2. אורכי הקטעים הם $KL = MJ = x + 2$, $LM = JK = x + 1$.
3. שטח המלבן הוא $S=(x+1)(x+2)$ או $S=x^2+3x+2$.

130. בכל סעיף יש לפתוח את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב.

א) $25+(x^2-4x+4x-16)=0$ ⇐ $9+x^2=0$ ⇐ $x^2=-9$ ⇐ אין פתרון למשוואה. (אין שורש ריבועי למספר שלילי.)

ב) $13-(x^2-x+2x-2)=-x^2$ ⇐ $13-x^2-x+2=-x^2$ ⇐ $15-x=0$ ⇐ $x=15$.

ג) $3-(x^2-3x+7x-21)=24$ ⇐ $3-x^2-4x+21=24$ ⇐ $-x^2-4x=0$ ⇐ $x(-x-4)=0$ ⇐ $x=0$ או $-x-4=0$ ⇐ $x=-4$

ד) $144-(x^2-5x+5x-25)=0$ ⇐ $144-x^2+25=0$ ⇐ $169=x^2$ ⇐ $x=13$ או $x=-13$.

131. יש להשוות כל גורם ל-0 כדי למצוא את הפתרונות. בדרך-כלל יש שלושה פתרונות, אך לעתים יש רק פתרון אחד או שניים.

א) $x(x^2-1)=0$ ⇐ $x=0$ או $x^2-1=0$ ⇐ $x^2=1$ ⇐ $x=1$ או $x=-1$. הפתרונות הם 0, 1, -1.

ב) $x(x^2+1)=0$ ⇐ $x=0$ או $x^2+1=0$ ⇐ $x^2=-1$. אין פתרון למשוואה. הפתרון הוא 0.

ג) $(x-7)(x^2-9)=0$ ⇐ $x-7=0$ ⇐ $x=7$ או $x^2-9=0$ ⇐ $x^2=9$ ⇐ $x=3$ או $x=-3$.
הפתרונות הם 0, 3, -3.

ד) $(x+6)(x^2-36)=0$ ⇐ $x+6=0$ ⇐ $x=-6$ או $x^2-36=0$ ⇐ $x^2=36$ ⇐ $x=6$ או $x=-6$.
הפתרונות הם 6, -6.

ה) $2x(x^2+5)=0$ ⇐ $2x=0$ ⇐ $x=0$ או $x^2+5=0$ ⇐ $x^2=-5$. אין פתרון למשוואה.
הפתרון הוא 0.

ו) $(4x+16)(x^2-81)=0$ ⇐ $4x+16=0$ ⇐ $x=-4$ או $x^2-81=0$ ⇐ $x=9$ או $x=-9$.
הפתרונות הם -4,9,-9.

ז) $(6x+42)(x^2-100)=0$ ⇐ $6x+42=0$ ⇐ $x=-7$ או $x^2-100=0$ ⇐ $x=10$ או $x=-10$.
הפתרונות הם 0, 10, -10.

ח) $(2x-3)(5x^2-20)=0$ ⇐ $2x-3=0$ ⇐ $x=3/2$ או $5x^2-20=0$ ⇐ $5(x^2-4)=0$ ⇐ $x^2-4=0$ ⇐ $x=2$ או $x=-2$. הפתרונות הם 3/2, 2, -2.

132. דוגמה: א) $(x-2)(x-3)=0$. ב) $(x+6)(x-5)(x-4)=0$. ג) $(4x+3)(3x-2)(2x-1)=0$

133. א) $x^3-9x=x(x^2-9)=0$ ⇐ $x=0$ או $x^2-9=0$ ⇐ $x^2=9$ ⇐ $x=3$ או $x=-3$. הפתרונות הם 0, 3, -3.

ב) $-x^3+25x=x(-x^2+25)=0$ ⇐ $x=0$ או $-x^2+25=0$ ⇐ $x^2=25$ ⇐ $x=5$ או $x=-5$.
הפתרונות הם 0, 5, -5.

ג) $x^3-x=x(x^2-1)=0$ ⇐ $x=0$ או $x^2-1=0$ ⇐ $x^2=1$ ⇐ $x=1$ או $x=-1$. הפתרונות הם 0, 1, -1.

ד) $x^3+7x=x(x^2+7)=0$ ⇐ $x=0$ או $x^2+7=0$ ⇐ $x^2=-7$ אין פתרון למשוואה. הפתרון הוא 0.

ה) $2x^3-200x=2x(x^2-100)=0$ ⇐ $2x=0$ ⇐ $x=0$ או $x^2-100=0$ ⇐ $x^2=100$ ⇐ $x=10$ או $x=-10$.
הפתרונות הם 0, 10, -10.

ו) $6x^3-6x=6x(x^2-1)=0$ ⇐ $6x=0$ ⇐ $x=0$ או $x^2-1=0$ ⇐ $x^2=1$ ⇐ $x=1$ או $x=-1$. הפתרונות הם 0, 1, -1.

ז) $10x^3-360x=0$ ⇐ $10x(x^2-36)=0$ ⇐ $10x=0$ ⇐ $x=0$ או $x^2-36=0$ ⇐ $x=6$ או $x=-6$. הפתרונות הם 0,6,-6.

ח) $-4x^3+36x=4x(-x^2+9)=0$ ⇐ $4x=0$ ⇐ $x=0$ או $-x^2+9=0$ ⇐ $x^2=9$ ⇐ $x=3$ או $x=-3$ הפתרונות הם 0, 3, -3.

134. א) $(x+1)(x-1)=x^2-x+x-1=x^2-1$. ב) אגף שמאל שווה ל- x^2-1 (לפי סעיף א'). חיסור 1 מ- x^2 מקטין את התוצאה, ולכן $x^2-1<x^2$. ג) $(x+2)(x-2)=x^2+2x-2x-4=x^2-4$. מאותה סיבה, $(x+2)(x-2)<x^2$

ד) לפי סעיפים א' ו-ג', $(x+1)(x-1)=x^2-1$, $(x+2)(x-2)=x^2-4$. $-1 > -4$, לכן $(x+2)(x-2)<(x+1)(x-1)$.

ה) לסעיף 1 אפשר להתייחס כמקרה פרטי (דוגמה מספרית) לסעיף ב'. כך לגבי סעיף 2 וסעיף ג'.

1) $101=100+1$, $99=100-1$. לכן $101\cdot99<100^2$.

2) $32=30+2$, $28=30-2$. לכן $30^2>32\cdot28$.

3) מקרה פרטי של סעיף ד': מאחר ש- $42 = 40 + 2$, $38 = 40 – 2$, $41 = 40 + 1$ ו- $39 = 40 – 1$, נקבל $42\cdot38>41\cdot38$.

4) כמו בסעיף הקודם: $499 = 500 - 1$, $501 = 500 + 1$, $502 = 500 + 2$, $498 = 500 - 2$ לכן $499\cdot501>502\cdot498$.

135. כאשר פותחים את הסוגריים לפי חוק הפילוג המורחב, הביטוי xy המופיע בשני האגפים מתבטל. מקבלים מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים, ואפשר לפתור אותה בדרך הנוחה: השוואת מקדמים או הצבת הנעלם.

א) $(x+1)(y+1)=xy+x+y+1=xy+8 \Leftarrow x+y=7$. נתקבלו שתי משוואות: $x+y=7$ ו- $x-y=5$.
אפשר לחבר את המשוואות או לחסר אותן או להציב את אחד הנעלמים. נקבל $x=6$, $y=1$.

ב) $(2x-1)(y+1)=2xy+2x-y-1=2xy+4 \Leftarrow 2x-y=5$. נתקבלו שתי משוואות: $2x-y=5$ ו- $x+y=1$.
במקרה זה נוח לחבר את המשוואות. נקבל $x=2$, $y=-1$.

ג) $(x-3)(y-2)=xy-2x-3y+6$, $(x+4)(y+6)=xy+6x+4y+24 \Leftarrow 8x+7y=-18$.
במקרה זה נוח לכפול את המשוואה השנייה ב-2 ולחסר את המשוואות. נקבל $y=2$, $x=-4$.

ד) $(3x-4)(2y+1)=6xy+3x-8y-4$, $(2x-1)(3y+4)=6xy+8x-3y-4 \Leftarrow -5x-5y=0$.
$(2x-1)(y+1)=2xy+2x-y-1=xy+8 \Leftarrow 2x-y=9$. אפשר לחלק את המשוואה הראשונה ב-5 ולחבר את המשוואות. אפשר לכפול את המשוואה השנייה ב-5 ולחבר את המשוואות. אפשר להציב את y מהמשוואה השנייה במשוואה הראשונה, ואפשר, כמובן, לכפול את המשוואה הראשונה ב-2 ואת השנייה ב-5 ולחבר. בכל דרך נקבל $y=-3$, $x=3$.

העמקה, עמ' 407

כדי להוכיח ששלשה היא פיתגורית יש להראות שמתקיים בה השוויון $a^2+b^2=c^2$.
נציב: $c=m^2+n^2$, $b=2mn$, $a=m^2-n^2$, ונראה שהשוויון אכן מתקיים.
$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$
נפתח את הסוגריים באגף השמאלי. נקבל $(m^2)^2-2m^2n^2+(n^2)^2+4m^2n^2$.
לאחר כינוס האיברים הדומים נקבל $(m^2)^2+2m^2n^2+(n^2)^2$.
נפתח סוגריים באגף הימני. נקבל $(m^2)^2+2m^2n^2+(n^2)^2$.
בשני האגפים נתקבל אותו ביטוי, כלומר השוויון מתקיים. לפיכך השלשה היא שלשה פיתגורית.