ט. אי שוויונות

רקע

התלמידים עסקו בנושא משוואות בפרקים ג', ט' ו- י"א, וכעת הם ילמדו אי-שוויונות.
יכולנו להעלות על הדעת שהמעבר משוויונות/ממשוואות לאי-שוויונות מתבצע באופן טבעי ומצריך מעט הסברים נוספים על ייצוג גרפי ועל כפל אי-שוויון במספר שלילי, שכן קיים דמיון מסוים בין שני התחומים. אולם קיימים הבדלים יסודיים משמעותיים המקשים את המעבר הזה, והם מובאים בטבלה שכאן..

	שוויון/משוואה	אי-שוויון
סימון	סימן אחד : =	ארבעה סימנים : $>, <, \leq, \geq$
רפלקסיביות	לכל מספר $\boldsymbol{a}$ מתקיים $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.	לכל מספר $\boldsymbol{a}$ מתקיים $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{a}$; לאף מספר $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{a}$ לא מתקיים.
סימטריה	מתקיימת. אם $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, אז $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.	לא מתקיימת. אם $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, אז $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{a}$. מתקיימת *אנטי-סימטריה** .
חוק ההעברה	מתקיים. אם $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ ו- $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, אז $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$. אין חשיבות בסדר השוויונות.	מתקיים. אם $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ ו- $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{c}$, אז $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{c}$. יש חשיבות בסדר האי-שוויונות.
שמירת הקשר בחיבור או בחיסור של אותו איבר משני האגפים	אם $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, אז $\boldsymbol{a + c = b + c}$ $\boldsymbol{a - c = b - c}$.	אם $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$, אז $\boldsymbol{a + c \geq b + c}$ $\boldsymbol{a - c \geq b - c}$.
שמירת הקשר בכפל או בחילוק של שני האגפים באותו איבר	מתקיים. אם $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, אז $\boldsymbol{a \cdot c = b \cdot c}$ $\boldsymbol{a : c = b : c}$.	לא תמיד מתקיים. אם $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ ו- $\boldsymbol{c} > 0$, אז $\boldsymbol{a \cdot c < b \cdot c}$. אם $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ ו- $\boldsymbol{c} < 0$, אז $\boldsymbol{a \cdot c > b \cdot c}$.
ייצוג גרפי	הייצוג הגרפי של השוויון $\boldsymbol{x} = 1$ הוא **נקודה** אחת בציר המספרים.	הייצוג הגרפי של האי-שוויון $\boldsymbol{x} \geq 1$ הוא **קרן** בציר המספרים. הייצוג של $\boldsymbol{x} \geq 1$ שונה מהייצוג של $\boldsymbol{x} > 1$.
מספר פתרונות	למשוואה ממעלה ראשונה, למשל $2\boldsymbol{x} - 5 = 1$, יש בדרך כלל פתרון אחד ויחיד.	לאי-שוויון ממעלה ראשונה, למשל $2\boldsymbol{x} - 5 < 1$, יש בדרך כלל אין-סוף פתרונות.

<u>הערה</u> : *תכונת *אנטי-סימטריה* : "אם $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, **בהכרח** $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{a}$". זו תכונה של קשרים מהסוג "סדר".
תכונה זו שונה מ"אי-סימטריה" או מ"לא-סימטריה". כאשר אין סימטריה, לא תמיד יש אנטי-סימטריה.

מהטבלה עולה כי ההבדלים (בתאים המודגשים) בין שוויונות לבין אי-שוויונות הם רבים, ולכן יש ללמד את הנושא החדש לאחר דיון מעמיק בכל התכונות הייחודיות לאי-שוויונות.
בעיה נוספת בהוראת הפרק הנוכחי נובעת מכך שכאשר בתחום המשוואות משתמשים בשתי המילים *שוויון* ו*משוואה* ומבחינים בין משמעויותיהן, כאן קיים המונח *אי-שוויון*, אבל המונח *אי-משוואה* אינו קיים בעברית (באנגלית, למשל, משתמשים במילים *inequality* ו- *inequation*). ליתר דיוק : המונח "שוויון" מייצג שני מספרים/ביטויים שהם שווים ביניהם באופן **מוחלט**, בין שמופיעים בו משתנים ובין שלא. למשל, $2 + 5 = 7$ ו- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$ הם שוויונות. לעומת זאת המונח "משוואה" מייצג שני גדלים שמופיע בהם נעלם אחד או יותר, כאשר השאלה הנשאלת היא : "עבור אילו ערכים של המשתנה/ים שני הביטויים הם שווים?" למשל, $3\boldsymbol{x} + 6 = 21$ ו- $\boldsymbol{x}^2 = 1 + \boldsymbol{x}$ הן משוואות (הערה : לפי ההקשר, הביטוי $2(\boldsymbol{x} + 1) = 2\boldsymbol{x} + 2$ יכול להיות שוויון או משוואה.) בהקשר זה ידוע לתלמידים כי נהוג להשתמש בתכונות ה*שוויון* כדי לפתור *משוואות*. בפרק הנוכחי הוחלט להשתמש במונח חדש כדי להבהיר באיזה אי-שוויון מדובר :
א) באי-שוויון מוחלט ובתכונותיו, או ב) באי-שוויון שמתקיים רק עבור ערכים מסוימים של משתנה נתון.
לאורך כל הפרק הנוכחי ייצג המונח *אי-שוויון אלגברי* אי-שוויונות מסוג ב'.
כך תתאפשר דרך הוראה מקבילה למשוואות. גם כאן קודם חוקרים את התכונות של אי-שוויונות באופן כללי ובהמשך מיישמים את התכונות שנלמדו לצורך פתרון אי-שוויונות אלגבריים.

טו. אי שוויונות

קשיים צפויים בהוראת הפרק:

- קושי למורה: לעורר את העניין של התלמידים לאורך פרק שיש בו חישובים רבים;
- בניגוד לפתרון של משוואה, פתרון של אי-שוויון אינו מספר מסוים, אלא אין-סוף מספרים;
- בניגוד לפתרון של משוואה, בפתרון של אי-שוויון לא "מבטלים" מכנה באופן אוטומטי;
- יש לזכור "להפוך" את הסימן של האי-שוויון כאשר כופלים או מחלקים את שני האגפים במספר שלילי;
- פתרון של אי-שוויונות שיש בהם שברים קשה יותר;
- פתרון של שאלות מילוליות;
- הבנת הקשר בין פתרון של אי-שוויון לבין נקודת החיתוך של שתי פונקציות;
- ההבנה שאת הפתרון של האי-שוויון יש לחפש על ציר ה- x;
- המשמעות של אי-שוויונות ללא פתרונות ושל אי-שוויונות שכל המספרים הם הפתרון שלהם;
- הוכחות פורמליות של כפל ושל חילוק של שני האגפים של אי-שוויון.

מומלץ להקדיש להוראת הפרק כ- 8 שעות.

מושגים

סדר, אי-שוויון, שוויון, סימני אי-שוויון ($<$, $\le$, $>$ ו- $\ge$), ייצוג אי-שוויון על ציר המספרים, תכונות השוויון, תכונות האי-שוויון ביחס לפעולות החיבור והחיסור, מספרים נגדיים, תכונות האי-שוויון ביחס לפעולות הכפל והחילוק, אי-שוויון אלגברי, פתרון אי-שוויון אלגברי, שאלות מילוליות, פתרון גרפי, משוואת ישר, נקודת חיתוך של ישרים במערכת צירים, אי-שוויון כפול, ייצוג אי-שוויון במערכת צירים, ייצוג משוואות מסוג $x = m$ ו- $y = k$ במערכת צירים.

מטרות

התלמידים ידעו:

א. לקבוע אם אי-שוויון מהסוגים $a < b$, $a > b$, $a \le b$ או $a \ge b$ הוא נכון או לא-נכון (a ו- b הם שני מספרים נתונים);

ב. להשלים אי-שוויון מהסוג $a \; ... \; b$ בסימן מתאים;

ג. לייצג על ציר המספרים את קבוצת המספרים מתקיימים בהם אחד מהאי-שוויונות: $x < a$, $x > a$, $x \le a$, $x \ge a$;

ד. לחבר מספר או ביטוי אלגברי מהסוג ax לשני האגפים של אי-שוויון נתון;

ה. לחסר מספר או ביטוי אלגברי מהסוג ax משני האגפים של אי-שוויון נתון;

ו. לכפול או לחלק את שני האגפים של אי-שוויון נתון באותו מספר **חיובי** (שמירה על סימן האי-שוויון);

ז. לכפול או לחלק את שני האגפים של אי-שוויון נתון באותו מספר **שלילי** (שינוי סימן האי-שוויון);

ח. לזהות אי-שוויון אלגברי;

ט. לבדוק אם מספר נתון הוא אחד הפתרונות של אי-שוויון נתון;

י. לקבוע אם שני אי-שוויונות אלגבריים ממעלה ראשונה שקולים או לא שקולים;

יא. לפתור אי-שוויון אלגברי ממעלה ראשונה בדרך אלגברית ולייצג את קבוצת הפתרונות שלו;

יב. לפתור אי-שוויונות מיוחדים, שהפתרון שלהם הוא מספר, ואי-שוויונות שאין להם פתרון כלל;

יג. לפתור שאלות מילוליות הנפתרות על-ידי אי-שוויונות ממעלה ראשונה;

יד. לפתור אי-שוויון אלגברי ממעלה ראשונה בדרך גרפית, על-ידי ייצוג שני האגפים במערכת צירים;

טו. לאתר את כל נקודות המישור (במערכת צירים) ששיעור ה- x (או ה- y) שלהן גדול ממספר נתון; קטן ממספר נתון; גדול ממספר או שווה לו; קטן ממספר או שווה לו.

ט. אי שוויונות

מגלים ולומדים, עמ' 280

א. <u>תכונות אי-שוויון</u>, עמ' 280

<u>מגלים</u>

בפעילויות אלה התלמידים חוזרים על תכונות בסיסיות הקשורות לאי-שוויונות.

1. בשאלה שתי מטרות: להכין את התלמידים לכך שלאי-שוויון יש בדרך כלל אין-סוף פתרונות, וכן להראות, למשל, שהמספרים הגדולים מ- 2 אינם רק מספרים שלמים, אלא כוללים מספרים כגון 2.1, $3\frac{1}{4}$, $\sqrt{5}$.

2. ודאו שהתלמידים יודעים לסדר מספרים מכוונים בסדר עולה או יורד. אם לא, אפשר לסרטט ציר דומה על הלוח ולהוסיף בו את המספרים השלמים $-2, -1, 0, 1, 2$ ורק לאחר מכן לבקש מהתלמידים להתאים את האותיות למספרים הנתונים.

3. הרבה תלמידים מתקשים להבין את המושגים "קטן או שווה" ו"גדול או שווה". על המורה להראות שמושגים אלה קיימים בחיי היום-יום בעזרת הדוגמה הנתונה.

4. המעבר בין אי-שוויון מסוג $3 < 5$ לאי-שוויון מסוג $5 > 3$ אמנם נראה טבעי אך לטכניקה זו יש חשיבות בפתרון אי-שוויונות. לדוגמה, באי-שוויון $3 < 7\boldsymbol{x} - 4$ ייתכן שתלמידים יכתבו:

$3 < 7\boldsymbol{x} - 4$
$-7\boldsymbol{x} < -4 - 3$
$-7\boldsymbol{x} < -7$
$\boldsymbol{x} < 1$ (טעות!)

הפתרון הנכון (הפשוט יותר) הוא

$3 < 7\boldsymbol{x} - 4$
$7\boldsymbol{x} - 4 > 3$
$7\boldsymbol{x} > 7$
$\boldsymbol{x} > 1$

מאותה סיבה מומלץ לבקש מדי פעם מהתלמידים "להפוך" בשיטה זו אי-שוויונות מספריים או אלגבריים המוצעים להם בהמשך הפרק.

<u>לומדים</u>

בהתחלת השיעור חוזרים על מושגים ידועים, כיצד מושג אי-שוויון בא לידי ביטוי בחיי היום-יום, וכיצד מייצגים שני מספרים $\boldsymbol{a}$ ו- $\boldsymbol{b}$ על ציר, כאשר $\boldsymbol{a}$ גדול או קטן מ- $\boldsymbol{b}$ או שווה לו. בשלב זה הקשיים הם נדירים ביותר אצל התלמידים, לכן רצוי לעבור על מבוא זה בקצרה.
אחר-כך מציגים את המושגים "גדול או שווה" ו"קטן או שווה". ייתכן שתלמידים יתקשו להבין את המושגים האלה. כדי להדגים אותם רצוי להסתמך על כמה דוגמאות פשוטות. למשל, כדי להבחין בין "גדול מ-" לבין "גדול מ- או שווה ל-" אפשר להראות אי-שוויונות אלה:

$5 > 3$ ✗	אינו אי- שוויון נכון	$5 \ge 3$ ✗	אינו אי-שוויון נכון
$5 > 4$ ✗	אינו אי- שוויון נכון	$5 \ge 4$ ✗	אינו אי-שוויון נכון
$5 > 4.9$ ✗	אינו אי -שוויון נכון	$5 \ge 4.9$ ✗	אינו אי-שוויון נכון
$\boxed{5 > 5}$ ✗	אינו שוויון נכון	$\boxed{5 \ge 5}$ ✓	הוא אי-שוויון נכון
$5 > 5.001$ ✓	הוא שוויון נכון	$5 \ge 5.001$ ✓	הוא אי-שוויון נכון
$5 > 6$ ✓	הוא שוויון נכון	$5 \ge 6$ ✓	הוא אי-שוויון נכון
$5 > 7$ ✓	הוא שוויון נכון	$5 \ge 7$ ✓	הוא אי-שוויון נכון

<u>מתרגלים</u>

1. אפשר לנסח את האי-שוויונות בשני אופנים. א) 9 גדול מ-5, או 5 קטן מ-9. ד) c גדול מ- 9 או שווה ל- 9-, או 9- קטן מ-c או שווה ל-c.

2. יש אין-סוף מספרים הגדולים מ- $2\frac{3}{5}$, וכולם חיוביים. יש אין-סוף מספרים הקטנים מ-7-, וכולם שליליים.

3. יש שתי אפשרויות לכתוב את האי-שוויון. א) $a>5$ או $5<a$. ד) $d \ge 7$ או $7 \le d$.

4. כל המספרים החיוביים גדולים מאפס, וכל השליליים קטנים מאפס. המספר 0 אינו חיובי ואינו שלילי.
א) $m>0$. ב) $k \ge 0$. ג) $s<0$. ד) $t \le 0$.

5. בדרך-כלל התלמידים מצליחים להשוות שני מספרים חיוביים. כאשר שני המספרים שליליים, אפשר להיעזר בציר מספרים דמיוני: ככל שהמספר רחוק יותר מהאפס, הוא קטן יותר. כמו-כן כל מספר חיובי גדול מאפס ומכל מספר שלילי.

6. א-ב) האי-שוויונות אינם שקולים. סימן האי-שוויון שונה.

טו. אי שוויונות

לומדים

חלק זה של השיעור חוזר לנושא ידוע מפרקים קודמים: הצבת מספר במקום משתנה בביטוי אלגברי. התלמידים שכבר למדנו כיצד לבדוק אם שוויון מתקיים עבור ערך מסוים של משתנה לא אמורים להתקשות בהצבת מספרים באי-שוויונות.

מתרגלים

7. האי-שוויונות הנכונים הם ב׳ ו-ד׳. יש לשים לב להבדל בין סעיף ב׳ לסעיף ג׳.

8. האי-שוויונות הנכונים הם ב׳ ו-ד׳. יש לשים לב להבדל בין סעיף ב׳ לסעיף ג׳.

9. הטענה נכונה. אילו הטענה הייתה רק $x>y$ ו- $x<y$, הטענה לא הייתה נכונה.

לומדים

בחלק זה של השיעור אנו מראים כיצד מייצגים אי-שוויונות מהסוגים $\boldsymbol{x} < 4$, $\boldsymbol{x} \le 4$, $\boldsymbol{x} > -3$ ו- $\boldsymbol{x} \ge -3$ על ציר המספרים. הדגישו כי חשוב להראות את העיגול (מלא או ריק) של קצה הקרן המייצגת כל אי-שוויון נתון.

מתרגלים

10. מאחר שהאי-שוויון אינו כולל את סימן השוויון, העיגול בתחילת הקרן ריק.

11. מאחר שהאי-שוויון כולל את סימן השוויון, העיגול בתחילת הקרן מלא.

12. יש לשים לב לכיוון הקרן וכן לעיגול המלא או הריק שבתחילתה. ב) C. ג) D. ד) E. ה) A.

לומדים

לאחר שלימדנו כיצד מייצגים אי-שוויונות מהסוגים $\boldsymbol{x} < 4$ (וכדומה) על ציר המספרים, אנו מציגים את הייצוג של אי-שוויונות מהסוג $4 < x < 10$ (אי-שוויון כפול). הקושי הספציפי היחיד של מיומנות זו הוא ההבנה הנכונה של הסימנים $<$, $>$, $\le$, $\ge$, המשפיעה על סרטוט נכון של קצוות הקטעים המיוצגים על ציר המספרים.

מתרגלים

13. בכל סעיף יש שתי אפשרויות לכתוב את האי-שוויון. למשל בסעיף א): x גדול מ-0 וקטן מ-6, או x נמצא בין 0 ל-6.

14. יש לרשום מספר הנמצא בין שני המספרים הכתובים. קיימות הרבה אפשרויות. דוגמאות: א) 0.5. ב) -1. ג) -0.5. ד) 0. ה) -99.5. ו) אפשר להרחיב את השברים כדי שיהיה קל יותר למצוא מספר ביניהם: $\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$, $\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$, ולכן $\frac{9}{40}$ נמצא ביניהם.

15. $2 \le n \le 5$.

16. א) כולם בני פחות מ-30, לכן הנקודה הימנית ביותר, D, היא 30. לפי הכתוב, גילו של הילל הוא בין גילו של אליאל לבין גילו של עזרא. אליאל הוא הגדול מבין השלושה, לכן הנקודה C מתאימה לו, הנקודה B מתאימה להילל, ו-A לעזרא. ב) C.

17. רק טענה ב׳ נכונה. אפשר לבקש מהתלמידים לתקן את הטענות שאינן נכונות. התיקון עוזר בהבנה.

לומדים

כאמור, ההבחנה בין הסימן $<$ לבין הסימן $\le$, ובין הסימן $>$ לבין הסימן $\ge$ אינה ברורה לחלק ניכר של התלמידים, בעיקר מכיוון שבהשוואה בין מספרים (בלי משתנים) הסימן ברור $=$ או $<$ או $>$ ואין מצב של שילוב של שני סימנים. לכן יש צורך להדגים את השימוש בסימנים אלה ואת ההבדל ביניהם על-ידי דוגמאות מילוליות מחיי היום-יום, בהן מופיעים ביטויים כגון ״לכל היותר״, ״לפחות״, וכו׳. דוגמה נוספת של שימוש בסימן $\ge$: ״חניה חינם בחניון הקניון למי שקונה לפחות ב- 100₪ באחת מהחנויות.״

מתרגלים

18. ג) ״לכל היותר 2״- פירושו 2 או פחות מ-2, כלומר 0 , 1 , 2.

19. דוגמה: A. מחיר כל מוצר הוא פחות מ-100 ₪. $x<100$. B. המחיר לשעה הוא 25 ₪ או יותר מ-25 ₪. $y \ge 25$. C. מחכים בתור פחות מ-10 דקות. $z<10$. D. הריבית היא פחות מ-4%. $r<4$. E. משלמים עמלה תמורת הפקדה של פחות מ-5,000 ₪. $k<5{,}000$.

20. סכום כל שתי צלעות גדול מאורך הצלע השלישית. $x<y+z$, $y+z>x$, $x+z>y$, $x+y>z$.

טו. אי שוויונות

21. השטח הוא לפחות 48 מ"ר, כלומר 48 מ"ר או יותר מ-48 מ"ר. א) האורך הוא 6 מ', לכן הרוחב צ"ל $x \ge 8$.
ב) הרוחב הקטן ביותר הוא 8 מ', לפיכך השטח הוא 48 מ"ר .

מתרגלים

22. יש לשים לב מתי הערך נכלל באי-שוויון ומתי לא. כאשר מופיעים ביטויים כמו: "לפחות", "לכל היותר", וכדומה, הערך כלול באי-שוויון. א) $x>28$. ב) $n<40$. ג) $v \le 160$. ד) $y \ge 8$. ה) $n \le 15{,}000$.

23. א) מאחר שכתוב "רק מעלי", הערך אינו כלול. $x>10$.

24. כמו בתרגיל 6, ניתן להיעזר בציר מספרים דמיוני: ככל שהמספר רחוק יותר מהאפס, הוא קטן יותר. נוסף על-כך יש לשים לב לספרות שאחרי הנקודה העשרונית.

25. בתרגילי חילוק, כאשר המחלק הוא שבר חיובי $(0<n<1)$, המנה גדולה מהמחולק. כאשר המחלק גדול מ-1, המנה גדולה מהמחולק. לכן א) > , ד) > , ו) > .
בתרגילי כפל, כאשר אחד הגורמים הוא שבר חיובי $(0<n<1)$, המכפלה קטנה מהגורם הגדול. לכן ב) <.
ה) <. המספר 72 נכפל במספר הקטן מ-0.5 , לכן התוצאה קטנה מ-36 שהוא חצי מ-72 . ג) <. מחברים למספר 1/2 שני מספרים שהאחד 7/13 גדול מהאחר 1/3, לכן הסכום גדול יותר.

בתרגילים 26-27 יש לשים לב לכיוון הקרן וכן לעיגול המלא או הריק שבתחילתה.

28. יש לרשום מספר הנמצא בין שני המספרים הכתובים. קיימות הרבה אפשרויות. דוגמאות: א) -7.5.
ב) $\frac{1}{3}$ או 0.4. בסעיף ג' אפשר לכתוב את המספרים הנתונים כ- -0.50 ו- -0.60, כדי שיהיה קל יותר למצוא מספר ביניהם (למשל -0.55). כך גם בסעיף ה'. ד) $\frac{2}{3}$ או 0.9. ו) אפשר להרחיב את השברים כדי שיהיה קל יותר למצוא מספר ביניהם: $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$, ולכן $\frac{7}{10}$ נמצא ביניהם.

29. א) כולם גבוהים מ-1.70 מ', לכן הנקודה השמאלית ביותר, E, היא 1.70. לפי הכתוב, גובהו של אליאל הוא בין גילו של הילל לבין גילו של עזרא, עזרא הוא הגבוה מכולם, לכן הנקודה M מתאימה לו, הנקודה H לאליאל, ו-G להילל. ב) C.

30. הנקודות S,R,P יכולות לייצג את x. הנקודות Y ,T יכולות לייצג את y.

31. ההתאמה בין הייצוג המילולי והאלגברי מחדד את ההבנה. א) C. ב) E. ג) D. ד) F. ה) B. ו) A.

32. "לפחות 180 נקודות"- פירושו 180 נקודות או יותר, לכן רק בנימין שקיבל 179 נקודות לא עבר לשלב הבא.

33. מהירות 90 קמ"ש לכל היותר כוללת גם את הערך 90, לכן ורד לא עברה על החוק.

34. מאחר שמספר הפרות הוא לכל היותר 20 ומספר הבננות 5, מספר הפרות האחרים קטן מ-15 או שווה ל-15.

ב. <u>תכונות האי-שוויון: פעולות חיבור וחיסור</u>, עמ' 290

מגלים

1. שאלה זו היא מעין מבוא לתכונת האי-שוויון שתידון בהמשך: אם $a-b>0$, אז $a>b$.
לאחר שהתלמידים ימצאו את התשובה הנכונה, אפשר לשאול אותם: "איזה מספר אפשר לכתוב במקום 5 כדי שהתשובה תהיה $c>d$?"

2. התלמידים מגלים כאן את חוק ההעברה. אפשר לבקש מהם להדגים אותו בצורות שונות. דוגמה: אם אורי גדול מערן ואם שי קטן מערן, אורי גדול משי."

3. המטרה היא שהתלמידים יגיעו למסקנה: כאשר מוסיפים אותו מספר לשני האגפים של אי-שוויון שמתקיים, מתקבל אי-שוויון שמתקיים.

4. כמו בפעילות הקודמת, אך כאן מתייחסים לפעולות חיסור במקום לפעולות חיבור.

5. מוצע כאן ייצוג פורמלי יותר של התכונה שנדונה בשאלה 3. אפשר לבקש מהתלמידים לבנות ייצוג דומה בפעולות חיסור במקום בפעולות חיבור, כמו בשאלה 4.

טו. אי שוויונות

לומדים: מספרים נגדיים באי-שוויון, עמ' 290

הערה כללית לשיעור זה: קשה לחלק מהתלמידים להשתמש בכל הכללים הנלמדים כאן עם **מספרים שליליים** וכן עם **משתנים**. לכן רצוי לשלב מספרים שליליים ומשתנים בדוגמאות באופן תדיר, כך שהתלמידים יגיעו בעצמם למסקנה שאין ההבדל מהותי בין מספרים חיוביים לבין מספרים שליליים או משתנים ביחס לתכונות המוצגות בשיעור.
שימוש בייצוג שבפעילות הגילוי מאפשר להגיע למסקנה זו.

באופן כללי תלמידי כיתה ח' לא ישתמשו בתכונות $\boldsymbol{a > b \leftrightarrow a - b > 0}$ ו- $\boldsymbol{a < b \leftrightarrow a - b < 0}$ הנלמדות בתחילת השיעור, לצורך פתרון אי-שוויונות. בכל זאת יש ללמד אותם מכמה סיבות:

• כללים אלה קלים יחסית להבין, ומאפשרות לתלמידים "לשחק" עם אי-שוויונות עם מגוון ביטויים מספריים או אלגבריים, מה שיקל על פתרון אי-שוויונות ושאלות מילוליות בהם הם יתמודדו בהמשך הפרק.

• על-ידי תכונות אלה ניתן להוכיח כללים, כגון: $\boldsymbol{a + c > b + c \leftrightarrow a > b}$.

מוכיחים כך: $\boldsymbol{a > b \leftrightarrow a - b > 0 \leftrightarrow a + c - (b + c) > 0 \leftrightarrow a + c > b + c}$.

כמובן, יש להימנע מדיון מעמיק בנושא זה, אם רמת הכיתה אינה מספיק גבוהה.

מתרגלים

תרגילים 35-36 הם יישום של הנלמד בשיעור על הקשר בין ההפרש בין מספרים לבין גודלם.

37. האי-שוויונות שקולים. מחסרים גודל שווה, z, משני האגפים של אי-שוויון שמתקיים, מקבלים אי-שוויון שמתקיים.

38. הביטויים הנכונים הם א', ג' ו-ד'.

39. אפשר להרחיב את שני השברים למכנה משותף, כדי שיהיה קל יותר להשוות ביניהם. $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$

$\frac{4}{5} = \frac{24}{30}$. אפשר גם לחסר את השברים ולוודא שההפרש גדול מ-0. $\frac{5}{6} - \frac{4}{5} = \frac{25}{30} - \frac{24}{30} = \frac{1}{30} > 0$.

לומדים: מספרים נגדיים באי-שוויון, עמ' 292

התלמידים לומדים כאן על תכונות האי-שוויון הבסיסיות: חוק ההעברה, תכונות החיבור והחיסור: $\boldsymbol{a + c > b + c \leftrightarrow a > b}$, $\boldsymbol{a - c > b - c \leftrightarrow a > b}$. כללים אלה מהווים אבני היסוד לפתרון אי-שוויונות ושאלות מילוליות בהם נדון בהמשך הפרק. לכן אין לעבור לשיעור הבא כל עוד התלמידים רובם ככולם לא הפנימו את המיומנויות הנדרשות.
הנקודה המשותפת לתכונות אלה היא הדמיון לתכונות השוויון (בניגוד לכללים אחרים, כגון כפל שני האגפים של אי-שוויון באותו מספר שלילי). מסיבה זו הכללים המוצגים כאן הם אינטואיטיביים יחסית.
בכל זאת לא מומלץ להסביר את הוכחותיהן המתמטיות (שכאמור אינן טריוויאליות כלל).

מתרגלים

40. בשני האגפים אחד המחוברים שווה, לכן יש להשוות רק בין המחובר השני בכל אגף. ככל שהוא גדול יותר, הסכום גדול יותר.

41. כמו בתרגיל 40 יש להשוות רק בין המחוברים שאינם שווים.

42. בסעיפים א' ו-ב' שני השברים קטנים מ-1/2, ולכן סכומם קטן מ-1. בסעיף ג' אחד השברים הוא אמנם 1/2, אבל השבר השני קטן מ-1/2, ולכן הסכום קטן מ-1. בסעיף ד' שני השברים גדולים מ-1/2, ולכן הסכום גדול מ-1.

43. בשני האגפים אחד הביטויים שווה, ולכן יש להשוות רק בין המספר השני שבכל אגף.

44. א) סימן האי-שוויון נשאר. מוסיפים לשני האגפים מספר שווה: 7. ב) סימן האי-שוויון נשאר. מחסרים משני האגפים מספר שווה: 5. ג) סימן האי-שוויון נשאר. מוסיפים לשני האגפים מספר שווה: 2-. ד) סימן האי-שוויון נשאר. מוסיפים לשני האגפים מספר שווה: 3. ה) סימן האי-שוויון נשאר. מחסרים משני האגפים מספר שווה: 5. ו) סימן האי-שוויון נשאר. מחסרים משני האגפים מספר שווה: b.

45. מוסיפים/ מחסרים מספר שווה משני האגפים. א) 11. ב) 0. ג) 0. ד) x+5. ה) x-5. ו) 6.

לומדים: מספרים נגדיים באי-שוויון, עמ' 294

כאן מוכחת התכונה: $\boldsymbol{a < b \leftrightarrow -a > -b}$.

יש לציין כי אין צורך לכפול את האי-שוויון $\boldsymbol{a < b}$ ב- (1-) כדי שיתקבל האי-שוויון $\boldsymbol{-a > -b}$, אלא מספיק לחסר את המספר $\boldsymbol{a + b}$ משני האגפים של האי-שוויון $\boldsymbol{a < b}$. בדרך כלל התלמידים מבינים מדוע סימן האי-

ט. אי שוויונות

שוויון מתהפך, כאשר הם מתבוננים בייצוג הגרפי של המספרים הנתונים על ציר המספרים. נוסף על הדוגמאות הנתונות כאן, רצוי להציע כמה דוגמאות נוספות במספרים או בביטויים אלגבריים. לדוגמה, אפשר להראות לתלמידים את האי-שוויון $5 > -2$ ולבקש מהם להשלים: $-5 < 2$.
כמובן, קיים קשר הדוק בין התכונה הנוכחית לבין כפל אגפי אי-שוויון במספר שלילי, ואכן, נשתמש בתכונה זו כדי להסביר מדוע כאשר כופלים או מחלקים את שני האגפים של אי-שוויון באותו מספר שלילי, סימן האי-שוויון שמתקבל מתהפך.

מתרגלים

.46 ט) המספרים הנגדיים של שני מספרים הם בסדר הפוך מסדר המספרים.

.47 א1) המכנים שווים, לכן ככל שהמונה גדול יותר, השבר גדול יותר. ב1) המונים שווים, לכן ככל שהמכנה קטן יותר, השבר גדול יותר. ג1) 4/3 גדול מ-1, 3/4 קטן מ-1. ד1) 3/5 גדול מ- 1/3, 1/3 קטן מ- 3/5.
בשורה השנייה רשומים המספרים הנגדיים לאלה המופיעים בשורה הראשונה, ולכן הסדר הפוך מסדר המספרים.

.48 בשני האגפים אחד המחוברים שווה, לכן יש להשוות רק בין המחובר השני בכל אגף. ככל שהוא גדול יותר, הסכום גדול יותר.

.49 נתון ש-$a>b$, ולכן $-a<-b$. בסעיפים א' ו-ב' מחברים/מחסרים מספר, ולכן הסימן נשאר. בסעיפים ג' ו-ד' מחסרים משתנה, ולכן הסימן נשאר. א) >. ב) >. ג) >. ד) >.

תרגילים 53-50 הם יישום של הנלמד בשיעור על הקשר בין ההפרש בין מספרים לבין גודלם.

.54 א) חיסור 5 משני האגפים. ב) חיסור 2 משני האגפים. ג) חיסור b משני האגפים.

.55 א) בנימין מבוגר יותר. ב) c מייצג את גילה של אריאלה בעוד 4 שנים. d מייצג את גילו של בנימין בעוד 4 שנים.
ג) $d>c$. כאשר מוסיפים מספר שווה לשני אגפים של אי-שוויון שמתקיים, מתקבל אי-שוויון שמתקיים.

.56 א) כלל ההעברה: $a>c$. ב) הוספת מספר שווה לשני האגפים: $a+c>b+c$. ג) חיסור מספר שווה משני האגפים: $a-c>b-c$.

.57 א) הוספת b לשני האגפים של האי-שוויון: $a<b$. ב) חיבור שני האי-שוויונות. יש להקפיד בחיבור על כיוון האי-שוויון. ג) חיסור שני האי-שוויונות, יש להקפיד בחיסור על כיוון האי-שוויון. ד) $\frac{b}{a}>1$
מאחר ש- $b>a$, המונה גדול מהמכנה. $\frac{c}{d}<1$ כיוון ש- $c<d$, כלומר המונה קטן מהמכנה.

.58 נתון ש-$a>b$, ולכן $-a<-b$. א) >. ב) >. ג) >.

.59 $-a<-b<-c$. המספרים הנגדיים הם בסדר הפוך מסדר המספרים.

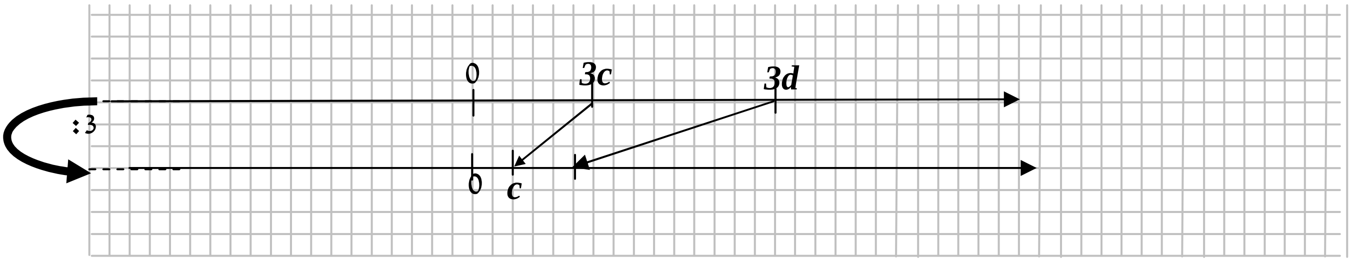
ג. <u>תכונות האי-שוויון: פעולות כפל וחילוק</u>, עמ' 297

מגלים

.1 א. כדי להראות שאם $a<b$, אז $3a>3b$, מומלץ לבקש מהתלמידים להציג שתי דוגמאות, אחת של מספרים חיוביים, ואחת של מספרים שליליים.
ב. כאן התלמידים יגלו בדרך חזותית בציר המספרים את שתי התכונות: 1) כאשר כופלים את שני האגפים של אי-שוויון באותו מספר **חיובי**, סדר האי-שוויון המתקבל זהה לסדר של האי-שוויון המקורי; 2) כאשר כופלים או מחלקים את שני האגפים של אי-שוויון באותו מספר **שלילי**, סימן האי-שוויון המתקבל מתהפך.

.2 מטרת השאלה היא להדגים את הכללים לעיל בהקשר של חיי היום-יום, כאשר המספר שכופלים בו את שני אגפי האי-שוויון הנתון הוא מספר חיובי הקטן מ- 1. בהקשר זה תלמידים מתבלבלים בין מספרים שליליים לבין מספרים חיוביים הקטנים מ- 1. אפשר להדגים את השאלה הנתונה על ציר המספרים הנתון כאן: אם מספר הספרים של דניאל הוא $3d$ ומספר הספרים של יוסי הוא $3c$, שליש ממספר הספרים של דניאל הוא d ושליש ממספר הספרים של יוסי הוא c. לפי נתוני השאלה $3d > 3c$.

טו. אי שוויונות



לומדים

אי-הבנת תכונות האי-שוויון בפעולות כפל וחילוק היא אחד הקשיים המוכרים ביותר אצל התלמידים. קושי זה נובע גם מכך שהתלמידים שוכחים להפוך את הסימן "<" לסימן ">" או להפך, כאשר הם כופלים או מחלקים את שני האגפים של אי-שוויון במספר שלילי, אך בעיקר מכך שאין להם ייצוג מנטלי של אותן פעולות הכפל והחילוק. יתר על כן, לעתים תלמידים מתקשים לנסח באופן מדויק את התכונות הנלמדות, או "להמציא" בעצמם דוגמאות מתאימות ליישום של אותן תכונות, כאשר הם מתבקשים לשחזר אותן.
לכן בעת הצגת הכללים המובאים בשיעור הנוכחי יש להציג דוגמאות מתאימות לכל כלל (ואפילו דוגמאות מספריות, כלומר ללא משתנים), ולייצג אותן על ציר המספרים כפי שנעשָׂה בפעילויות הגילוי הקודמות. רצוי גם כן לבקש מהם להמציא דוגמאות נוספות. כאשר התלמידים יפתרו תרגילים בהמשך השיעור מומלץ לבקש מהם לחזור מדי פעם על הניסוח המילולי של הכללים הנלמדים.

מתרגלים

.60 כשכופלים שני אגפים של אי-שוויון במספר חיובי, נשמר הסדר של האי-שוויון.

.61 א) x הוא מספר חיובי. אגף שמאל (-3x) הוא מספר שלילי. ב) כאשר מחלקים שני אגפי אי-שוויון במספר שלילי, סימן האי-שוויון המתקבל מתהפך. נקבל x>0, השקול לאי-שוויון המקורי.

.62 א) $2a \ge 4$, כשכופלים מספר חיובי (2) נשמר הסדר. ב) $\frac{a}{2} \ge 1$ כשמחלקים במספר חיובי (2), נשמר הסדר.

ג) $-a \le -2$ כשכופלים מספר שלילי (-1), הסדר מתהפך. ד) $-\frac{a}{2} \le -1$ כשמחלקים במספר שלילי (-2) הסדר מתהפך.

.63 א) $\frac{c}{2} \ge -2$ כשמחלקים במספר חיובי (2), נשמר הסדר. ב) $-\frac{c}{2} \le 2$ כשמחלקים מספר שלילי (-2), הסדר מתהפך.
ג) $2c \ge -8$ כשכופלים במספר חיובי (2), נשמר הסדר. ד) $-2c \le 8$ כשכופלים במספר שלילי (-2), הסדר מתהפך.

.64 x הוא מספר חיובי. המסקנות הנכונות הן ב', ד', ו'.

.65 x הוא מספר שלילי. המסקנות הנכונות הן א', ד', ה'.

.66 א) $<$ ב) $>$ ג) $<$ ד) $>$

.67 כופלים שני אגפים של אי-שוויון במספר שלילי,סימן האי-שוויון מתהפך.

.68 א) $-b \le -\frac{1}{2}$ כשכופלים במספר שלילי (-1), הסדר מתהפך. ב) $\frac{b}{2} \ge \frac{1}{4}$ כשמחלקים במספר חיובי (2), נשמר הסדר.

ג) $2b \ge 1$ כשכופלים במספר חיובי (2), נשמר הסדר. ד) $-\frac{b}{2} \le -\frac{1}{4}$ כשמחלקים במספר שלילי (-2), הסדר מתהפך.

.69 א) כשכופלים במספר חיובי (5), נשמר הסדר. ב'-ג') כשכופלים במספר שלילי, הסדר מתהפך. ד) כשכופלים במספר חיובי (a), נשמר הסדר. ה) כשכופלים במספר שלילי (b), הסדר מתהפך. ו) כשכופלים במספר שלילי (-x), הסדר מתהפך.
ז) כשכופלים במספר שלילי (a-b), הסדר מתהפך.

בתרגילים 71-70 כשכופלים או מחלקים במספר חיובי, הסימן נשמר. כשכופלים או מחלקים במספר שלילי הסימן מתהפך.

72. דוגמה: א) 7- , כל מספר הקטן מ-5- או שווה ל-5-. ב) 20, כל מספר הגדול מ-10 או שווה ל-10-. ג)0. כל מספר הגדול מ-5- או שווה ל-5-. ד) 21. כל מספר הגדול מ-21 או שווה ל-21.

73. דוגמה: א) $-d \ge 3$. כשכופלים במספר שלילי (1-), הסימן מתהפך. ב) $-4d \ge 12$ ג) כשכופלים במספר שלילי (4-),הסימן מתהפך. ג) $3d \le -9$ כשכופלים במספר חיובי (3), נשמר הסימן. ד) $4d - 1 \le -13$.

74. א) a+b>25. חיבור שני האי-שוויונות. ב) ab>150. כפל שני האי-שוויונות.

75. א) כשכופלים במספר חיובי (c), נשמר הסדר. ב) כשכופלים במספר שלילי (c), הסדר מתהפך. ג) כפל ב-0 מאפס את שני האגפים. ac = bc. ד) כשמחלקים במספר שלילי (c), הסדר מתהפך.

76. א) כיוון שהסדר נשמר c>0. ב) כיוון שהסדר התהפך c<0.

77. א) כשכופלים במספר חיובי (7), נשמר הסדר. ב) כשכופלים במספר שלילי (7-), הסדר מתהפך.

78. כאשר ל- a ול-b סימנים שווים, שניהם חיוביים או שניהם שליליים. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. כאשר שניהם חיוביים, ככל שהמכנה גדול יותר, השבר קטן יותר. כאשר שניהם שליליים , ככל שהמכנה גדול יותר, השבר גדול יותר.

כאשר ל- a ול-b סימנים שונים, a חיובי ו-b שלילי. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. השבר $\frac{1}{a}$ חיובי, ולכן הוא גדול מהשבר $\frac{1}{b}$ שהוא שלילי.

בתרגילים 81-79 כדאי לכתוב את הביטוי בסוגריים ולהיעזר בחוק הפילוג. כשכופלים במספר חיובי, נשמר הסימן. כשכופלים במספר שלילי, הסימן מתהפך.

ד. <u>אי-שוויון אלגברי</u>, עמ' 302

<u>מגלים</u>

1. בפעילות זו יתבוננו התלמידים בזוגות של אי-שוויונות ויגלו **למה** הם שקולים. בכל האי-שוויונות שכאן בוצעו חיבור וחיסור. בחיפוש סיבת השקילות התלמידים מעלים למודעות את הפעולה שנעשתה וכך הם גם ידעו להשתמש בפעולות בצורה נבונה, כאשר הם יפתרו אי-שוויונות בעצמם.

א) **פעולות החיבור** של אותו מספר (כאן 9) לשני אגפי האי-שוויון נכתבות בפירוש (באי-שוויון B כתוב "$+9$" בשני האגפים).

ב) **פעולות החיבור** של אותו מספר (3) לשני אגפי האי-שוויון אינן נכתבות בפירוש (באי-שוויון B כתוב $x > 10$ ולא $x - 3 + 3 > 7 + 3$).

ג) **פעולות החיסור** של אותו מספר (5) משני אגפי האי-שוויון אינן נכתבות בפירוש (באי-שוויון B כתוב $x > 7$ ולא $x + 5 - 5 > 12 - 5$).

ד) **פעולות החיסור** של **המשתנה** משני אגפי האי-שוויון.

2. מטרת שאלה זו היא להכין את התלמידים לפתרון שאלות מילוליות ולתרגם נתונים על-ידי אי-שוויון (דוגמה: $x + 40 < 60$) וכן לחזור על-כך שיש בדרך כלל אין-סוף מספרים בהם מתקיים אי-שוויון נתון.

<u>לומדים</u>

מטרת שיעור זה אינה לפתור אי-שוויונות אלגבריים במקרה הכללי, אלא להציג את המושגים הבסיסיים השייכים לאי-שוויונות אלגבריים: הגדרת אי-שוויון אלגברי, בדיקת מספר כפתרון פוטנציאלי לאי-שוויון נתון, קבוצת הפתרונות של אי-שוויון, ייצוג קבוצת הפתרונות בציר המספרים. עקרונות אלה ישמשו את התלמידים בשיעור הבא, כאשר יפתרו אי-שוויונות אלגבריים בשלבים, באופן שיטתי.

<u>מתרגלים</u>

בתרגילים 83-82 על התלמידים להציב ערכים נתונים שונים במקום המשתנה ולבדוק אם האי-שוויון מתקיים.

בתרגילים 85-84 על התלמידים למצוא פתרונות אפשריים לאי-שוויונות. יש תלמידים שיבחרו בדרך של ניסוי וטעייה, אחרים ינסו לפתור את האי-שוויונות.

ט. אי שוויונות

לומדים

המושג אי-שוויונות שקולים הוא הכלי האחרון הנדרש כדי לפתור אי-שוויונות אלגבריים. ברגע שהתלמידים יכולים לזהות אי-שוויונות שקולים פשוטים על-ידי תכונות האי-שוויון, או להיפך להוכיח ששני אי-שוויונות אינם שקולים על-ידי הצבת מספר מסוים, ניתן לעבור לשיעור הבא.

מתרגלים

86. א) $x+4>0$. ב) $5+a>0$. ג) $b>0$. ה) $-y-4>0$. ו) $a^2+b^2-2ab>0$. ז) $a^2+b^2+2ab>0$. ח) $x^2+1+2x>0$
87. א', ג', ט'. ב', ז'. ד', י"א. ה', ח', י'. ו', י"ב.

בתרגילים 88-89 על התלמידים להציב ערכים נתונים שונים במקום המשתנה ולבדוק אם האי-שוויון מתקיים.

בתרגילים 90-92 על התלמידים למצוא פתרונות אפשריים לאי-שוויונות. יש תלמידים שיבחרו בדרך של ניסוי וטעייה, אחרים ינסו לפתור את האי-שוויונות.

93. שני המספרים יכולים להיות חיוביים. דוגמה: $y=4$, $x=5$. שני המספרים יכולים להיות שליליים. דוגמה: $x=-5$, $y=-5$. אחד המספרים יכול להיות חיובי, והאחר שלילי. דוגמה: $y=10$, $x=-10$. אחד המספרים או שניהם יכולים להיות 0.

94. בסעיפים א' ו-ב' אפשר להציב את המספרים הנתונים ולבדוק אם האי-שוויון מתקיים. ג) כל מספר שגדול מ-1.5- או שווה 1.5- ($x \geq -1.5$), הוא פתרון. ד) כל מספר שאינו שווה ל- 1.5- ($x \geq -1.5$), אינו פתרון.

95. א) $2x-1<0$. ב) $7y<0$. ג) $8z<0$. ד) $6a-b<0$. ו) $a^2+b^2-2ab<0$. ז) $a^2-b^2-2a<0$. ח) $x^2+2x-3<0$.

96. אפשר לנסות לפתור כל אחד מארבעת האי-שוויונות ועל-ידי כך למצוא את האי-שוויונות השקולים.
א',ו',י"ג,ט"ו,כ"א.
ב',ז',י',ט"ז,כ"ב. ג',ח',י"א,י"ד,י"ז,כ'. ד',ה',ט',י"ב,י"ח,י"ט.

ה. <u>פתרון אי-שוויון אלגברי</u>, עמ' 307

מגלים

1. כאן ניתנת ההזדמנות לדון עם התלמידים באחד ההבדלים העיקריים בין פתרון משוואות לבין פתרון אי-שוויונות אלגבריים: כפל שני האגפים במספר שלילי. כדי להמחיש את ההבדל הזה לתלמידים, רצוי להראות שהפתרונות של האי-שוויון $-2x < 10$ אינם פתרונות של האי-שוויון $x < -5$, ולהפך, על-ידי דוגמאות פשוטות. למשל, המספר 1 הוא אחד הפתרונות של האי-שוויון $-2x < 10$, אך הוא אינו פתרון של האי-שוויון $x < -5$; המספר 6- הוא אחד הפתרונות של האי-שוויון $x < -5$, אך הוא אינו פתרון של $-2x < 10$. בהמשך השיעור מומלץ להשתמש בשיטה זו בכל פעם שהתלמידים "שוכחים" להפוך את הסימן < ל- > או להפך, כשהם פותרים אי-שוויון.

2. א. רצוי להסב את תשומת לבם של התלמידים לכך שכאשר פותרים אי-שוויון אלגברי ממעלה ראשונה, נוח יותר לבודד את הנעלם באגף שבו המקדם שלו יהיה חיובי.
במשוואה הנתונה $2x - 50 > 5x - 30$, אם מבודדים את הנעלם באגף הימני מקבלים: $7x > 80$, וכדי לפתור אי-שוויון זה אין בעיה של חילוק במספר שלילי. לעומת זאת אם מבודדים את הנעלם באגף השמאלי, מקבלים: $-7x > -80$.
ב. רצוי לפתור את האי-שוויון הנתון על-ידי בידוד הנעלם באגף הימני כך:

$$-7x + 4 < 12 + x$$
$$4 - 12 < x + 7x$$
$$-8 < 8x$$

בשלב זה אפשר לחלק את שני האגפים ב- 8 בלי להפוך את סימן האי-שוויון.
מקבלים $-1 < x$
כלומר $x > -1$
בכל זאת יש להדגיש לתלמידים שהסימן השלילי של המספר 8- שבאגף השמאלי של האי-שוויון $-8 < 8x$ אינו משפיע על הסימן של האי-שוויון, מכיוון שאין מחלקים את אגפי האי-שוויון ב- 8-, אלא במקדם של הנעלם (כאן 8).
כמובן, אפשר להשוות בין דרך הפתרון הזו לבין הדרך של בידוד הנעלם באגף השמאלי.

ג. ישנן כמה דרכים להראות שהאי-שוויון הנתון $5x+\frac{8}{3}+x>5$ שקול לאי-שוויון $15x+3x>15-8$. להלן מובאות שלוש דרכים.

דרך א׳:

$$5x+\frac{8}{3}+x>5 \quad |\cdot 3$$
$$3\cdot\left(5x+\frac{8}{3}+x\right)>3\cdot 5$$
$$15x+8+3x>15$$
$$15x+3x>15-8$$

דרך ב׳:

$$5x+\frac{8}{3}+x>5$$
$$\frac{15x}{3}+\frac{8}{3}+\frac{3x}{3}>\frac{15}{3} \quad |\cdot 3$$
$$15x+3x>15-8$$

דרך ג׳:

$$5x+\frac{8}{3}+x>5 \quad \left|-\frac{8}{3}\right.$$
$$5x+x>5-\frac{8}{3} \quad |\cdot 3$$
$$3\cdot(5x+x)>3\cdot\left(5-\frac{8}{3}\right)$$
$$15x+3x>15-8$$

לומדים

כאן מוצגות הפעולות המותרות לפתירת אי-שוויון, הנובעות מתכונות האי-שוויון שנלמדו עד כה, ומוסברים השלבים לפתירת אי-שוויון ממעלה ראשונה: א) בידוד הנעלם באחד האגפים, ב) כינוס איברים דומים וכתיבת אי-שוויון באחת מהצורות $ax>b$ או $ax\geq b$ או $ax<b$ או $ax\leq b$, ג) חילוק שני אגפי האי-שוויון במקדם של הנעלם וכתיבת הפתרון, ד) בדיקה.

בשל הטעויות הרבות הנובעות מחילוק שני אגפי אי-שוויון במספר שלילי, רצוי להפנות את התלמידים להסבר ב״מיומנויות״ (עמ׳ 520), כיצד להתמודד עם בעיה זו בדרכים שונות. לדוגמה, אפשר לפתור את האי-שוויון $-3x<12$ בדרך ה״קלסית״:

$$-3x<12 \quad | : (-3)$$
$$x>12:(-3)$$
$$x>-4$$

אבל קיימת אפשרות נוספת ה״עוקפת״ את בעיית השינוי של סימן האי-שוויון:

$$-3x<12 \quad | +3x$$
$$0<12+3x$$
$$-12<3x \quad | : 3$$
$$-4<x$$
$$x>-4$$

ידיעת שתי הדרכים האלה תעלה את רמת המודעות של התלמידים באשר לקושי זה.

מתרגלים

97. א) $x<2$. ב) $x>-2$. ג) $x>2$. ד) $x\leq 1.8$.

98. א) $x>7$. ב) $x<7$. ג) $x>-1$. ד) $x\geq 3$.

99. כאשר המקדם של x הוא 1-, כדאי לחבר לשני האגפים x שהמקדם שלו הוא הנגדי למקדם הנתון. רק אין צורך לחלק במספר שלילי כדי לבודד את x. כשמחלקים במספר שלילי, סימן האי-שוויון תלמידים עלולים להתקשות בכך ולשגות.

100. א) $x<-10$. ב) $x\geq -4$. ג) $x\leq 7$. ד) $x>5/3$.

101. א) $x<6$. ב) $x>4$. ג) $x>-5$. ד) $x>-15$.

102. ב) כאשר כופלים אי-שוויון, יש לכפול את שני האגפים (כמו במשוואות), לכן האי-שוויון השקול הוא ③.

103. פתרונות האי-שוויונות: 1) $x>4$. 2) $x>-1$. 3) $x>-2$. ב) כאשר מַציגים את הפתרונות על ציר המספרים, קל לראות שהחלק המשותף לכל הפתרונות הוא $x>4$.

104. בסעיפים א׳-ח׳ המקדם של x חיובי (1), לכן יש לחבר או לחסר את המספרים, וסימן האי-שוויון לא ישתנה. בסעיפים ט׳-י׳ המקדם של x שלילי (1-), ולכן סימן האי-שוויון מתהפך. ט) $-x<8 \leftarrow x>-8$. י) $-x\geq 0 \leftarrow x\leq 0$.

105. המקדם של המשתנה חיובי לכן יש לחבר או לחסר את המספרים, וסימן האי-שוויון לא ישתנה.

106. בסעיפים א׳-ב׳-ג׳-ה׳ המקדם של x שלילי, ולכן סימן האי-שוויון מתהפך.

107. בכל הסעיפים פרט לסעיף ו׳ המקדם של המשתנה חיובי, לכן המשתנה נשאר במקומו וסימן האי-שוויון נשמר.

108. המקדם של המשתנה חיובי, לכן המשתנה נשאר במקומו וסימן האי-שוויון נשמר. יא) x>-b/a. יב) x<a/b.

109 המשתנה והמספרים מופיעים בשני האגפים. כדאי לבודד את המשתנים באגף שהמקדם בו יהיה חיובי. ״יחסוך״ חילוק במספר שלילי והיפוך הסימן.

בתרגילים 110-111 יש לפתוח תחילה את הסוגריים לפי חוק הפילוג ואחר-כך להמשיך לפתור כמו בתרגיל 109.

112. דרך הפתרון כמו בתרגיל 109. חלק מהמקדמים של x הם מספרים עשרוניים.

113. א) כשכופלים במספר שלילי הופכים את סימן האי-שוויון. ב) כאשר כופלים אי-שוויון, יש לכפול את שני האגפים (כמו במשוואות), לכן האי-שוויון השקול הוא ②.

114. א) C (לפי תכונות הפרופורציה). ב) A (כפל שני האגפים ב-5). ג) A (לפי תכונות הפרופורציה). ד) C.

115. א) y<2/3. ב) y+4>12 ← y>8. ג) $\frac{3}{32} \le x \leftarrow 3 \le 4 \bullet 8 \bullet x$.

116. א) x>6/5. ב) 7/16<a. ג) $a \le \frac{10}{3}$. ד) a<10/21. ה) x<5/14. ו) x<4/9.

117. קו שבר דינו כדין סוגריים. הסוגריים רשומים לצורך הדגשה. בסעיפים א׳-ג׳ אפשר לכתוב את התרגיל גם ללא הסוגריים. א) $3/7<x \leftarrow \frac{24}{7} - 3 < x \leftarrow \frac{6 \bullet 4}{7} < x + 3$. ג) $-\frac{2}{3} < x \leftarrow \frac{12}{9} - 2 < x$. ד) $11<x \leftarrow 6<x-5 \leftarrow \frac{3}{2} \div \frac{1}{4} < x - 5$.

118. המקדם של המשתנה שלילי. כשמחלקים במספר שלילי, הופכים את סימן האי-שוויון. א) x<-6/5. ב) -7/16>a.

ג) $a \le -\frac{10}{3}$. ד) -10/21>a.

119. תחילה יש להגיע לאי-שוויון שקול ללא מכנה. אפשר לבחור באחת הדרכים המוצעות בדוגמאות הפתורות. המשך הפתרון הוא כמו בתרגילים 95-97. א) x<7/3. ב) x>9.75. ג) x<-2/7. ד) $-7\frac{20}{21} \le x$. ה) x<8/9. ו) x<5/8.

120. א) $-3\frac{1}{8} < x$. בסעיפים ב׳-ד׳ x מופיע במכנה. אפשר לבדוק תחילה מהו תחום ההצבה. אפשר לפתור תחילה את האי-שוויון ואחר- כך לוודא שהפתרון נמצא בתחום ההצבה. בכל הסעיפים תחום ההצבה היא $x \ne 0$.

ב) x<-12/89. ג) $x \le -4\frac{1}{3}$. ד) x<210/207.

121. א) x>1. ב) x<-9/4. ג) x<4/5. ד) $x \ge 1$.

122. א) $x \ge -\frac{4}{5}$. ב) x<13. ג) $x \le 67$. ד) $x \ge 1\frac{1}{2}$. ה) x<28.

ו. <u>אי-שוויונות ושאלות מילוליות</u>, עמ׳ 313

<u>**מגלים**</u>

1. דרך אפשרית לפתור את השאלה בתוך כדי שימוש בתכונות האי-שוויון:

(40 מ׳/שעה): 800 מ׳ > דרך

800 מ׳ / 40 מ׳/שעה > דרך / מהירות

כלומר: 20 שעות > זמן

לכן זמן הליכתו של החילזון הוא פחות מ- 20 שעות.
הערה: ייתכן שתלמידים יחשבו שהמספר 40 מתייחס לדרך שעבר החילזון בסך הכול, ולא למהירות של החילזון. לכן מומלץ לבדוק היטב אם התלמידים הבינו נכון את משמעות הנתונים.
במהירות של 40 מטר לשעה יידרשו לחילזון 20 שעות או יותר, כלומר לפחות 20 שעות (כולל הפסקות אוכל), כדי להגיע לעץ.

2. בעבר פתרו התלמידים מספר פעמים שאלות מילוליות כגון "חשבתי על מספר ***x***, כפלתי אותו ב- 3, חיסרתי 4 מהמכפלה,.וקיבלתי את המספר 10. מהו המספר שחשבתי עליו?" במשימה הנוכחית התלמידים מתבקשים לבצע אותו סוג של תרגום נתונים, אך הפעם הם יכתבו אי-שוויון אלגברי ולא משוואה. ההבדל המשמעותי יותר בין שני סוגי התרגילים (שאלה מילולית הנפתרת על-ידי משוואה או על-ידי אי-שוויון) אינו טמון בסעיף א' (תרגום הנתונים), אלא בסעיף ב' (כתיבת הפתרון) - התלמידים אינם רגילים לפתור שאלה מילולית שיש לה אין-סוף פתרונות. נוסף על כך ייתכן שחלק מהתלמידים עדיין מתבלבלים בין "יש אין-סוף פתרונות" לבין "כל מספר הוא פתרון".

לומדים

המסר העיקרי בקטע השיעור הנוכחי הוא שפתירת שאלה מילולית הקשורה לאי-שוויונות אינה שונה במהותה מפתירת שאלה מילולית הקשורה למשוואות. במילים אחרות, התלמידים כבר מכירים את כל הכלים הנדרשים ואת כל השלבים הרלוונטיים כדי לפתור את השאלות המילוליות המוצעות בתרגילים: קריאת הנתונים, זיהוי השאלה, ניתוח הנתונים והקשרים ביניהם, וכן הלאה.
בדוגמה המובאת בהמשך ייתכן שחלק מהתלמידים יתקשו להבין את הקשר בין האי-שוויון $x \le 22 : 1.5$ לבין האי-שוויון השקול לו $x \le 14\frac{2}{3}$. לכן יש להדגיש כי $1.5 = \frac{3}{2}$, ולכן:

$$22 : 1.5 = 22 : \frac{3}{2} = 22 \cdot \frac{2}{3} = \frac{44}{3} = 14\frac{2}{3}$$

מתרגלים

123. נסמן את מספר התיקיות ב-x. האי-שוויון המתאים הוא $\frac{129}{x} \le 10$ ← $12.9 \le x$. מאחר שמספר התיקיות צריך להיות מספר שלם, המספר הקטן ביותר הוא 13.

124. א) $8x \le 96$ ← $x \le 12$. אורך האולם יכול להיות לכל היותר 12 מ', כלומר 12 מ' או פחות. ב) 12 מ'.

125. נסמן את מספר הנשים ב-x. מספר הגברים הוא x-4. לפיכך מספר המשתתפים הוא: x+x-4=2x-4. האי-שוויון המתאים הוא 2x-4<40 ← x<22. מספר הנשים קטן מ-22. מספר הגברים קטן מ-18.

126. נסמן את מספר הבנות ב-x. מספר הבנים הוא x-7. מספר המשתתפים הוא x+x-7=2x-7. האי-שוויון המתאים הוא 2x-7<29 ← x<18. מספר הבנות קטן מ-18. מספר הבנים קטן מ-11.

127. נסמן את גילו של טל ב-x. גילו של גל הוא 4x. סכום הגילים הוא x+4x=5x. האי-שוויון המתאים הוא 5x<20 ← x<4. גילו של טל קטן מ-4. גילו של גל קטן מ-16.

128. נסמן את גילה של לאה ב-x. גילה של רחל הוא x/2. סכום הגילים הוא x+x/2=3x/2. האי-שוויון המתאים הוא 3x/2>45 ← x>30. גילה של לאה גדול מ-30. גילה של רחל גדול מ-15.

129. נסמן את ציון המבחן השלישי ב-x. דוגמה לכתיבת האי-שוויון: $\frac{85+89+x}{3} \ge 90$ ← $x \ge 96$. הציון צריך להיות לפחות 96.

130. נסמן את מספר השעות ב-x. דוגמה לכתיבת האי-שוויון: $25x \ge 900 - 220$ ← $x \ge 27.2$. מספר השעות צריך להיות מספר טבעי, לכן היא צריכה לעבוד לפחות 28 שעות.

131. דוד צריך יותר מ-2 דקות לכן 2<x; אבל הוא צריך לא יותר מ-6 דקות, כלומר 6 דקות או פחות, לכן $x \le 6$. נצרף את שני התנאים ולכתוב אי-שוויון כזה: $2 < x \le 6$.

132. א) E. ב) לדוגמה, A: יש לי חוב של m ₪. אם אפקיד בחשבון 500 ₪, תהיה לי יתרת זכות של יותר מ-200 ₪.
B: יש לי בחשבון 500 ₪. אם אוציא m ₪ תהיה לי יתרת זכות של פחות מ-200 ₪. C: יש לי חוב של m ₪. אם אפקיד בחשבון 200 ₪, תהיה לי יתרת זכות של פחות מ-500 ₪. D: יש לי בחשבון 200 ₪ אם אפקיד m ₪, תהיה לי יתרת זכות של יותר מ-500 ₪.

טו. אי שוויונות

133. נסמן את גילו של ראובן ב-x . גילו של שמעון הוא x-4. סכום הגילים הוא x+x-4=2x-4. האי-שוויון המתאים הוא $2x-4<20$ ← $x<12$. גילו של ראובן קטן מ-12 שנים. גילו של שמעון קטן מ-8 שנים.

134. נסמן את גילו של יוסף ב-x. גילו של יצחק הוא x-30. סכום הגילים הוא x+x-30=2x-30. האי-שוויון המתאים הוא $2x-30<100$ ← $x<65$. גילו של יוסף קטן מ-65. גילו של יצחק קטן מ-35.

135. נסמן את גילה של נהורה ב-x. גילה של צופיה הוא x-3. סכום הגילים הוא x+x-3=2x-3. האי-שוויון המתאים הוא $2x-3\le 18$ ← $x\le 10.5$. גילה של נהורה קטן מ- 10.5 או שווה ל-10.5. גילה של צופיה קטן מ- 7.5 או שווה ל-7.5.

136. נסמן את גילה של יהודית ב-x. גילו של דניאל הוא 2x+3. סכום הגילים הוא x+2x+3=3x+3. האי-שוויון המתאים הוא $3x+3\le 18$ ← $x\le 5$. גילה של יהודית הוא לפחות 5. גילו של דניאל הוא לפחות 13.

137. נסמן את המספר ב-x. דוגמה לכתיבת האי-שוויון הוא $\frac{2}{5}x-\frac{1}{4}x>15$ ← $x>100$. המספר גדול מ-100.

138. נסמן את המספר ב-x. האי-שוויון המתאים הוא $(2x+5)*4>60$ ← $x>5$. המספר הנבחר גדול מ-5. לדוגמה: 7.

139. נסמן את המספר ב-x. האי-שוויון המתאים הוא $(3x-2)*5-10x<30$ ← $x<8$. המספר הנבחר קטן מ-8. דוגמה: 6.

140. נסמן את מספר חטיפי התירס ב-x. לכן מספר חטיפי הבוטנים הוא 60-x. דוגמה לכתיבת האי-שוויון:

$x<\frac{60-x}{2}$ ← $x<20$.

המספר המרבי של חטיפי תירס הוא 18. אם מספר חטיפי התירס יהיה 19, שהוא פתרון אפשרי לאי-שוויון, מספר חטיפי הבוטנים לא יהיה מספר טבעי (20.5).

141. נסמן את מספר התשובות הנכונות ב-x. מספר התשובות השגויות הוא 30-x. האי-שוויון המתאים לדן:
$5x-2(30-x)\ge 80$ ← $x\ge 20$. דן ענה נכון על 20 שאלות לפחות. האי-שוויון המתאים לגד:
$5x-2(30-2)<80$ ← $x<20$. גד ענה נכון על פחות מ-20 שאלות.

142. נסמן את מהירות הליכתה של יונה ב-v. דוגמה לכתיבת האי-שוויון: $v<\frac{600}{10}$ ← $v<60$. מהירותה היא פחות מ-60 מ׳ לדקה.

143. א) לצורך קניית המכונית הזולה לילך זקוקה ל-9,000 ₪. עליה לחסוך כל חודש 750 ₪. (9,000 : 12=750).

ב) לצורך קניית המכונית היקרה לילך זקוקה ל-27,000 ₪. עליה לחסוך כל חודש 2250 ₪. 27000:12=2250.

ג) החיסכון בקניית המכונית הזולה: $3,000+750x\ge 12,000$. החיסכון בקניית המכונית היקרה: $3,000+2250x\ge 30,000$.

144. נסמן את מספר הדקות ב-x. דוגמה לכתיבת האי-שוויון: $26+0.3x\le 60$ ← $x\le 113.3$. מספר הדקות הוא לכל היותר 113.

145. א) יום א׳: x. יום ב׳: x+1. יום ג׳: x+2. יום ד׳: x+1. יום ה׳: x. ב) מספר הק״מ הכולל: x+x+1+x+2+x+1+x=5x+4. האי-שוויון המתאים: $5x+4\ge 55$ ← $x\ge 10.2$. מספר הק״מ הקטן ביותר הוא 11 ק״מ.

146. א) בשנה השנייה: x+200. בשנה השלישית: x+400. בשנה הרביעית: x+600. בשנה החמישית: x+800.

ב) סך-כל היבול: x+x+200+x+400+x+600+x+800=5x+2000. האי-שוויון המתאים:
$5x+2000\ge 10,000$ ← $x\ge 1600$. המשקל הקטן ביותר הוא 1,600 ק״ג.

147. א) יום ב׳: y+2. יום ג׳: y+4. יום ד׳: y+6. יום ה׳: y+8. יום ו׳: y. ב) סך-כל השאלות:
y+y+2+y+4+y+6+y+8+y=6y+20. האי-שוויון המתאים: $6y+20\ge 90$ ← $y\ge 11\frac{2}{3}$. מספר השאלות צריך להיות מספר טבעי, לכן עליו לפתור לפחות 12 שאלות.

148. 5% של 3.60 הם 0.18. כלומר האי-דיוק הוא של 0.18 מ׳. עליה להזמין לפחות 3.78 מ׳.

טו. אי שוויונות

149. שטח המשולש CKB הוא $y=\frac{x\cdot CH}{2}$. שטח המשולש CAK הוא $s=\frac{(15-x)\cdot CH}{2}$. כדי למצוא את היחס נחלק את השטחים כך: $\frac{y}{s}=\frac{x\cdot CH}{(15-x)\cdot CH}$. האי-שוויון המתאים הוא $\frac{x}{15-x}>2$ $\leftarrow$ $x>10$. מאחר שאורך הצלע AB הוא 15, x צריך להיות קטן מ-15. $10<x<15$.

150. שטח המשולש MPT הוא $s=\frac{(15+y)\cdot MH}{2}$. שטח המשולש MRT הוא $z=\frac{y\cdot MH}{2}$. כדי למצוא את היחס נחלק את השטחים כך: $\frac{s}{z}=\frac{(15+y)\cdot MH}{y\cdot MH}$. האי-שוויון המתאים הוא $\frac{15+y}{y}>2$ $\leftarrow$ $y<15$. y צריך להיות גדול מ-0, לכן $0<y<15$.

151. נסמן את מספר זרי הוורדים ב-x. לכן מספר זרי הצבעונים הוא 100-x. האי-שוויון המתאים הוא $5x+3(100-x)<400$ $\leftarrow$ $x<50$. המספר הגדול ביותר של זרי הוורדים הוא 49.

ז. <u>פתרון גרפי של אי-שוויון</u>, עמ' 319

מגלים

1. בפעילות זו התלמידים יפתרו אי-שוויון באמצעות גרף וישוו את הפתרון עם הפתרון האלגברי של אותו אי-שוויון.
סעיפים א', ב' ו- ג' הם הזדמנות לחזור על כתיבת שיעורים של נקודות בסדר הנכון (דוגמה: שיעורי הנקודה A הם (1,2), ולא (2,1).) חלק מהתלמידים עדיין עלולים להתבלבל.
בסעיפים ד' ו- ה' התלמידים יגלו מה משותף לכל הנקודות שעל הגרף של $g(x)$, הנמצאות מעל הגרף של $f(x)$: שיעורי ה- y שלהן גדולים מ- 2, ושיעורי ה- y שלהן גדולים מ- 1 (השיעורים 2 ו- 1 הם שיעורי ה- x וה- y של הנקודה A בהתאמה).
בסעיף ו' יבנו התלמידים אי-שוויון אלגברי: $-x+3<x+1$. רצוי לבקש מהם לפתור את האי-שוויון הזה בדרך אלגברית (הפתרון הוא $x>1$), ולבדוק שהפתרון מתאים לתשובתם בסעיף הקודם.

2. כאן מובאת לתלמידים דוגמה לפתרון גרפי של אי-שוויון שכל מספר הוא פתרון שלו, ודוגמה לפתרון גרפי של אי-שוויון שאין לו פתרון כלל. דוגמאות אלו מתקבלות באמצעות פונקציות ליניאריות בעלות אותו שיפוע (כאן $g(x)=x+1$ ו- $h(x)=x-5$), כלומר בעלות ייצוגים גרפיים שהם ישרים מקבילים.
בסעיפים ג' - ד' יציבו התלמידים מספרים במקום המשתנה, ויתחילו להבין באופן אינטואיטיבי מדוע לכל x נתון $h(x)$ תמיד קטן מ- $g(x)$.
בסעיפים ה'-ו' הם יכתבו מסקנות כלליות. רצוי לבקש מהם להסביר את תשובתם באמצעות הגרף.

לומדים

בשיעור זה מוצגים השלבים של פתירת אי-שוויון על-ידי ייצוג במערכת צירים, והמקרים השונים האפשריים, כאשר העיקרון הכללי הוא הייצוג של שני האגפים של אי-שוויון נתון כך:

- אם הגרפים המתקבלים **נחתכים**, יש למצוא את השיעורים של נקודת החיתוך של הגרפים, ולבדוק "מאיזה צד" של נקודת החיתוך האי-שוויון המבוקש מתקיים.
- אם הגרפים **מקבילים**, ישנן שתי אפשרויות:
  א) מיקום שני הגרפים מתאים לסימן של האי-שוויון הנתון (כמו בדוגמה המופיעה בשיעור $3x+12>x-2(4-x)$): במקרה זה כל מספר הוא פתרון של האי-שוויון;
  ב) מיקום שני הגרפים אינו מתאים לסימן של האי-שוויון הנתון (כמו בדוגמה המופיעה בשיעור $3x+5>x+2(x+4)$): במקרה זה אין פתרון לאי-שוויון.

כשהגרפים נחתכים, התלמידים מתקשים בעיקר ב**הטלה** (אין להשתמש במילה זו עם התלמידים.) על ציר ה- x של החלק של הגרפים המתאים לאי-שוויון הנתון לפני קריאת הפתרון. חלק מהתלמידים מטילים את הגרפים על ציר ה- y, אחרים מטילים את החלק הלא-נכון של הגרפים, וכו'. במקרה של הטלת הגרפים על ציר ה- y יש לשאול שאלות כגון: "מה מחפשים כשפותרים את המשוואה

טו. אי שוויונות

$5 - x > 2x - 4$: את הערכים האפשריים של x או של y? על איזה ציר צריך להסתכל כדי לקבוע את הפתרון: על ציר ה- x או על ציר ה- y?"

יש להסב את תשומת לבם של התלמידים לכך שכאשר הם פותרים אי-שוויון בדרך גרפית, אפשר לבדוק את הפתרון בשתי דרכים:

<u>בדיקה א'</u>: בדיקת השיעורים של נקודת החיתוך (בדיקה זו רלוונטית בעיקר כאשר התלמידים סרטטו את הגרפים בעצמם).

לדוגמה, אם הפתרון שנמצא הוא $x > 3$, יש להציב את המספר 3 בשני האגפים של האי-שוויון הנתון, ולבדוק שמקבלים ערך זהה בשניהם.

<u>בדיקה ב'</u>: בדיקת הסימן (> או <) המופיע בפתרון.

לדוגמה, אם הפתרון שנמצא הוא $x > 3$, מציבים מספר אחד גדול מ- 3 (רצוי לבחור מספר שיקל את החישובים, כגון 10) בשני האגפים, ומוודאים שהאי-שוויון המבוקש מתקיים.

<u>מתרגלים</u>

152. יש למצוא את נקודת החיתוך של הגרפים ולבדוק היכן הגרף של g(x) נמצא מעל הגרף של f(x). יש לשים לב שבודקים באיזה ערך של <u>x</u> שיעור ה- <u>y</u> גדול יותר. א) x>1.5. ב) x<0. ג) x>-3.5. ד) x>1. ה) x<3. ו) x>-0.5.

153. א) x<1.5. ב) x>0. ג) x<-3.5. ד) x<1. ה) x>3. ו) x<-0.5.

154. א) חברת HALLO: h(x)=100+0.2x. חברת TELLA: t(x)=90+0.25x. ג) כדי שיהיה עדיף להצטרף לחברת TELLA צריך למצוא את נקודת חיתוך של הגרפים ולבדוק היכן הגרף t(x) נמצא מתחת לגרף של h(x).

התשובה: בנקודת החיתוך x=200. כלומר כאשר מספר השיחות קטן מ-200, חברת TELLA עדיפה.

155. ב) 2x>-x+6. x>2. ג) 2x<-x+6. x<2.

156. ב) x+3>3x. x<1.5. ג) x+3<3x. x>1.5.

157. א) יש לפתוח סוגריים לפי חוק הפילוג ואחר-כך לפתור על-ידי בידוד המשתנה באגף אחד וריכוז המספרים באגף האחר.

$x < -9\frac{2}{3}$. ב) אין פתרון. מתקבלים ישרים מקבילים. 0>4.

158. יש לבדוק איזו פונקציה נמצאת מעל האחרת בתחום שהפיתרון מסורטט בו, וכן אם הנקודה ריקה או מלאה. א) g(x)<f(x). ב) $f(x) \le g(x)$.

159. יש לבדוק איזו פונקציה נמצאת מעל האחרת בתחום שהפתרון מסורטט בו, וכן אם הנקודה ריקה או מלאה.

למציאת קבוצת הפתרונות יש לבדוק מה שיעור ה-x של נקודת החיתוך של הפונקציות. א) g(x)> f(x), x<-1.5. ב) $g(x) \ge f(x)$, $x \le 0$. ג) g(x)<f(x), x>1.5.

160. א) g(x)>f(x). ב) $f(x) \ge g(x)$.

161. ב) -2x+1>4x. x<1/6. ג) -2x+1<4x. x>1/6.

162. ב) -2x+2>-0.5x+8. x<-4. ג) -2x+2<-0.5x+8. x>-4.

163. ב) $\frac{1}{3}x + 4 > -\frac{1}{2}x - 1$. x>-6. ג) $\frac{1}{3}x + 4 < -\frac{1}{2}x - 1$. x<-6.

164. אפשר לפתור בדרך גרפית או בדרך אלגברית. בכל הסעיפים פרט לסעיף ה' מתקבלים בדרך גרפית ישרים מקבילים. א) כל מספר הוא פתרון. (10 < 0). ב) כל מספר הוא פתרון. (0 ≥ 5). ג) כל מספר הוא פתרון. (12 < 0). ד) כל מספר הוא פתרון. (1 ≤ 0). ה) $x \ge 1.7$ ו) כל מספר הוא פתרון. (0 ≥ 0).

165. אפשר לפתור בדרך גרפית או בדרך אלגברית. בסעיפים בכל הסעיפים פרט לסעיף ה' מתקבלים בדרך גרפית ישרים מקבילים או מתלכדים. א) אין פתרון. (0 ≤ 1). ב) אין פתרון. (0>3). ג) אין פתרון. (−10 ≤ 0). ד) אין פתרון. (0>1). ה) $x \ge 1.7$ ו) אין פתרון. (0<0).

166. אפשר לפתור בדרך גרפית או בדרך אלגברית. בכל הסעיפים מתקבלים ישרים מקבילים. בסעיפים א'-ד ו-ו' כל מספר הוא פתרון. בדרך אלגברית מקבלים ש-0 גדול מכל מספר שלילי (או קטן מכל מספר חיובי). בסעיף ה' אין פתרון. מקבלים 0>4 או 0>-4.

167. אין פתרון. אם עבור כל ערך של x ‏g(x) קטן מ- f(x), אז g(x) לא יכול להיות גדול מ- f(x) או שווה לו.

168. אפשר "לקרוא" את נקודות החיתוך מתוך הסרטוט ולבדוק באילו תחומים הפונקציה f(x) נמצאת מתחת לפונקציה g(x).
א) בין שתי נקודות החיתוך הפונקציה f(x) נמצאת מתחת לפונקציה g(x). לכן ‎-6<x<2‎. ב) בין שתי נקודות החיתוך הפונקציה f(x) נמצאת מעל g(x), לפני נקודות החיתוך ואחריה הפונקציה f(x) נמצאת מתחת לפונקציה(g(x ולכן x<2 או x>6.

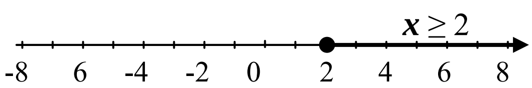
ח. <u>אי-שוויון כפול</u>, עמ' 327

<u>מגלים</u>

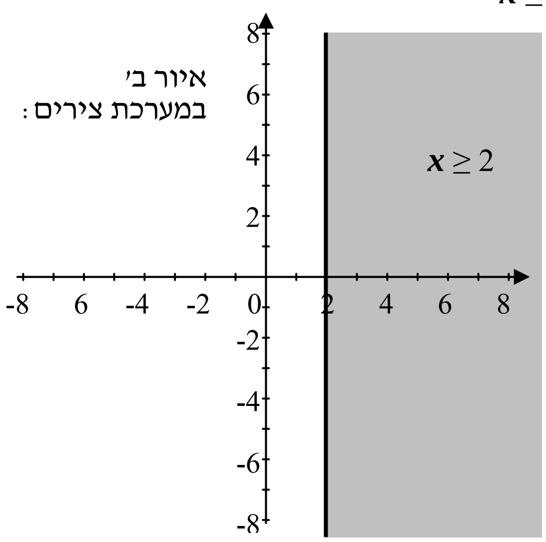
עד כה למדו התלמידים להציג בציר המספרים אי-שוויונות מהסוג $x \geq 2$, בהם מופיע נעלם אחד בלבד. כעת הם יתייחסו לייצוג של אי-שוויונות דומים במערכת צירים. (ראו איורים א'-ב'.)

ייצוגים שונים של האי-שוויון $x \geq 2$

איור א'
בציר המספרים:



איור ב'
במערכת צירים:



התלמידים יזהו במערכות צירים נקודות המתאימות לתיאורים מילוליים נתונים. בתיאורים אלו יופיעו הנעלם x בלבד (לדוגמה: שיעור ה- x גדול מ- 5), או המשתנה y בלבד, או שני המשתנים (לדוגמה, שיעור ה- x קטן מ- 5, ושיעור ה- y שלהם גדול מ- (7-)). יופיעו גם מקרים של אי-שוויונות כפולים על אחד המשתנים (לדוגמה, שיעור ה- y קטן מ- 6 וגדול מ- (7-)).

1. בפעילות זו התלמידים יְיַצְּגוּ אי-שוויונות במערכת צירים. ייתכן שתלמידים יחשבו שהנקודות ששיעור ה- x שלהן גדול מ- 4 (סעיף א'), שייכות דווקא לציר ה- x. מסיבה זו לא נוסחה השאלה כך: "מצאו במערכת צירים את כל הנקודות (x,y) בהן מתקיים האי-שוויון $x > 4$". ניסוח כזה עלול להטעות את התלמידים יותר מהתיאור המילולי "הנקודות ששיעור ה- x שלהן גדול מ- 4".

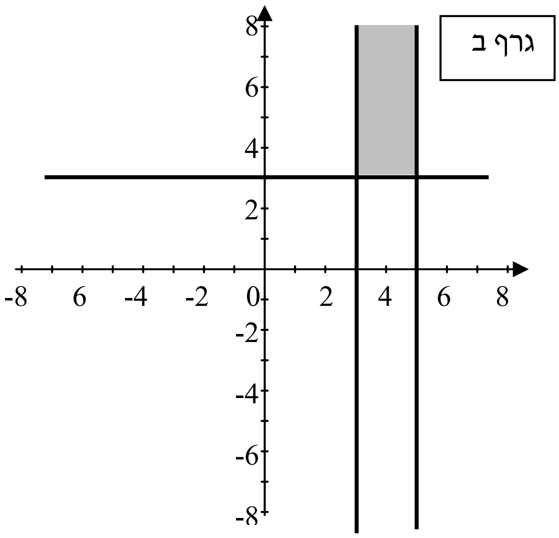
2. נוסף על ההקשר הנתון בשאלה, התלמידים מתבקשים, למעשה, לייצג את מערכת האי-שוויונות.

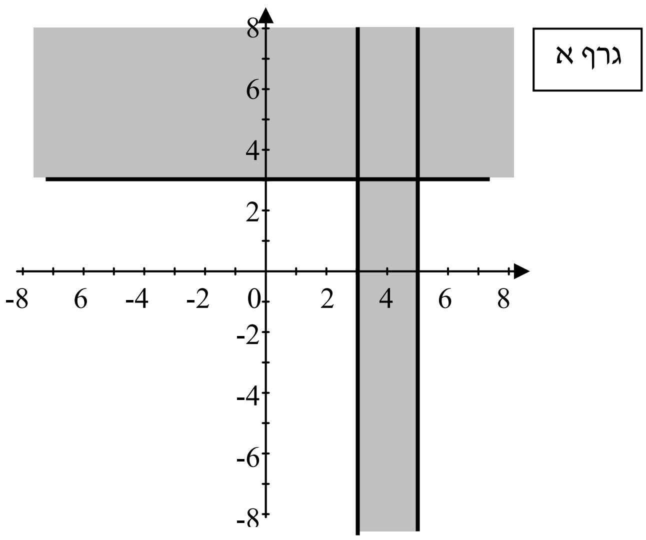
$$\begin{cases} 3 < x < 5 \\ y > 3 \end{cases}$$

במילים אחרות, ישנם שני חידושים בשאלה זו:
- אי-שוויון כפול המתקיים באחד המשתנים;
- שילוב של תנאים המתקיימים בשני משתנים.

בשל המורכבות של תנאים אלו ייתכן שחלק מהתלמידים "ישכחו" לקחת בחשבון אחד מהאי-שוויונות. נוסף על כך, ייתכן שתלמידים יגיעו למסקנה שקבוצת הנקודות המבוקשות היא החלק האפור בגרף א', במקום החלק האפור בגרף ב'.

טו. אי שוויונות

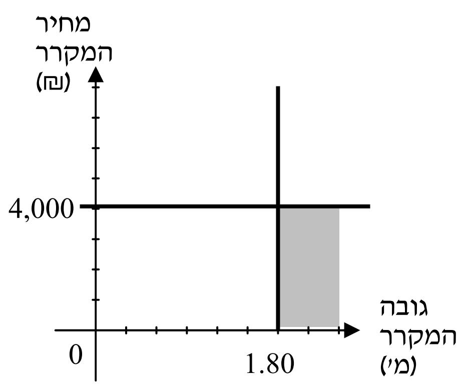




במובנים מתמטיים תלמידים אלו טועים בכך שהפתרון שהם מציעים הוא האיחוד של קבוצות הנקודות המתאימות לאי-שוויונות המתקיימים בכל אחד מהנעלמים, במקום החיתוך שלהן. במקרה של טעויות מסוג זה יש לבחור נקודות, שלדעת התלמידים, שייכות לקבוצה המבוקשת, ולבדוק אם הן מתאימות לתנאים הנתונים או לא, ומדוע.

לומדים

רצוי לבדוק לפני השיעור אם התלמידים זוכרים לסרטט גרף שמשוואתו $x = m$ או $y = k$.
זאת הזדמנות להזכיר כי ישר שמשוואתו $x = m$ הוא **מאונך** (ולא מקביל) לציר ה- x, וכי ישר שמשוואתו $y = k$ הוא **מאונך** לציר ה- y.
בשיעור מוצגת הדרך לאיתור נקודות שבהן מתקיימים תנאים כגון "שיעור ה- y שלהן קטן מ..." או "שיעור ה- x שלהן גדול מ...". כאמור, הוחלט שלא להשתמש כאן באי-שוויונות פורמליים כגון $x > 1.80$ או $y < 4{,}000$, כי התלמידים עלולים להתבלבל בין הייצוגים של אי-שוויונות מסוגים אלה בציר המספרים לבין ייצוגיהם במערכת צירים.
בדוגמה המוצעת כאן (דרישות על מחיר וגובה של מקרר) רצוי להראות בפירוש את חלק המישור המתאים לתנאים המופיעים בנתונים, כך:



(החלק האפור הוא החלק בו מופיעים הפתרונות לשאלה הנתונה.
כמובן, רק הנקודות הנמצאות ברביע הראשון רלוונטיות בהקשר הנתון.)

מתרגלים

169. א) x=4.5. ב) y=-1.5. ג) x>4.5. ד) y>-1.5. ה) יש הרבה מאוד נקודות. דוגמה: (0,0).

170. א) 1)כל הנקודות מימין לישר x=5. 2) כל הנקודות משמאל לישר x=5. 3) כל הנקודות שמעל ציר ה-x.
4) כל הנקודות שמתחת לציר ה-x. 5) K,D,A. 6) כל הנקודות, למעט הנקודות שבסעיף 5. 7) כל הנקודות, למעט C,M. 8) C,M. 9) כל הנקודות שבין שני הישרים x=5 ו x=-6. 10) כל הנקודות, למעט אלה שבסעיפים 5 ו-8. 11) כל הנקודות שמשמאל לישר x=5 ומעל הישר y=-7. H,P,D,E,B,A.
ב) דוגמה: שיעור ה-x קטן מ-6 ושיעור ה-y גדול מ-6.

171. הנקודות הנמצאות בין הישרים x=10 ו-x=20 וכן בין הישרים y=40 ו-y=70. רק הנקודה D מתאימה.

טו. אי שוויונות

172. בכל הסעיפים כדאי לסרטט תחילה את הישרים ואחר-כך לסמן את הנקודות לפי הנתונים. א) כל הנקודות הנמצאות
על הישר $x=-2$ ומתחת לישר $y=5$. ב) כל הנקודות הנמצאות מימין לישר $x=-2$ ועל הישר $y=5$.

173. כל הנקודות שבין הישרים $x=4$ ו-$x=8$ ומעל לישר $y=6$. כולל הנקודות שעל ישרים אלה. E,C,P,M,B.

174. א) שיעורי הנקודות הנמצאות בתוך המלבן, לא כולל צלעות המלבן, $-4<x<1$, $-2<y<1$.
ב) שיעורי הנקודות הנמצאות בתוך הריבוע, לא כולל צלעות הריבוע, $-7<x<-4$, $-8<y<-5$.

מיומנויות, עמ' 332

בחלק זה דנים בשני נושאים:
א) כפל או חילוק של אי-שוויון במספר שלילי;
ב) פתירת אי-שוויון כאשר הנעלם מופיע במונה של שבר.
מומלץ להפנות את התלמידים לשני עמודים אלה במשך שיעור ה' (פתרון אי-שוויון אלגברי).

ממשיכים בתרגול, עמ' 335

175. $3 < \pi$ לכן הביטוי $1 < \pi/3$ והביטוי $3/\pi < 1$. כלומר $3/\pi < \pi/3$.

176. א) מתחת גיל 18: $x<18$. בני 65 או יותר: $x \geq 65$.

177. $c^2>36$. אורך צלע הריבוע הוא $c>6$.

178. א) גילו של דוד הוא $19-a$. ב) $a>19-a$. ג) $a-(19-a)=3 \leftarrow a=11$. גדי בן 11, דוד בן 8.

179. א) $x<5$ או $x>70$.

180. נסמן את הציון במבחן השלישי ב-x. $\frac{25+48+x}{3} \geq 50 \leftarrow x \geq 57$. יואל צריך לקבל במבחן לפחות 57.

181. נסמן את הריבית בשנה השלישית ב-x. $\frac{400+550+x}{3} \geq 600 \leftarrow x \geq 850$. הריבית צריכה להיות לפחות 850 ₪.

182. א) כשכופלים במספר חיובי, שומרים על הסימנים. ב) כשכופלים במספר שלילי, הסימנים מתהפכים.

183. א) הביטוי באגף ימין שווה ל-3. הביטוי באגף שמאל גדול מ-6. $(k>5)$, לכן הביטוי באגף שמאל גדול יותר. ב) הביטוי באגף ימין שלילי (4-). הביטוי באגף שמאל חיובי, ולכן הוא גדול יותר. ג) באגף ימין מפחיתים 3, באגף שמאל מפחיתים 5. לכן הביטוי באגף ימין גדול יותר.

184. צריך להציב 0 בכל אחד מהאי-שוויונות ולבדוק אם מתקבל אי-שוויון שמתקיים. א', ד', ז', ח', י', י"א.

185. א) מאחר שהסימן נשאר, $c>0$. ב) מאחר שהסימן מתהפך, $c<0$. ג) כשמחלקים במספר שלילי, הופכים את הסימן, $x>-4$.

186. א) $3.5x-210$. ב) $3.5x-210>0 \leftarrow x>60$. עליו למכור יותר מ-60 גלידות. ג) $3.5x-210>300$
$\leftarrow x>145.7$. עליו למכור יותר מ-146 גלידות.

187. קובייה ג' קלה יותר.

188. $(a-b)^2\geq0$, חזקה שנייה של כל מספר היא חיובית. לכן $a^2+b^2-2ab\geq0$. נוסיף $2ab$ לשני האגפים $a^2+b^2\geq2ab$.

189. א) 2 אפשרויות. הוספה לאורך השולחן או לרוחבו. ב) היקף השולחן הוא 8 מ'. ההיקף החדש הוא לפחות 9.6 מ'. $(8*120\%)$. כדי לקבל היקף זה, תוספת של 1.6 להיקף, יש להצמיד קרש שרוחבו 0.8 מ', $(2 : 1/6)$.
אפשר להצמיד קרש שרוחבו 0.8 מ' לאורך השולחן או לרוחבו. הקרש הקצר יותר הוא זה שמוסיפים לרוחב השולחן. מידותיו הן 1 מ' ו-0.8 מ'. ג) אם מוסיפים את הקרש לרוחב השולחן, השטח הוא 0.8 מ"ר, $(1*0.8)$.
אם מוסיפים את הקרש לאורך השולחן, השטח הוא 2.4 מ"ר $(3*0.8)$.

190. א-ג-ה-ו-ח-ט.

ט. אי שוויונות

העמקה עמ׳ 341

מובאים כאן הסברים נוספים על כללי הכפל והחילוק של שני האגפים של אי-שוויון נתון באותו מספר חיובי או שלילי. קטע זה מיועד בעיקר לתלמידים המתקדמים. אם הם יבקשו לראות הוכחות פורמליות יותר בנושא, אפשר להראות להם את ההוכחה הזו:

- אם $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ ואם $\boldsymbol{k}$ הוא מספר **חיובי**, אפשר לומר ש-

$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} > 0$, כלומר $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ הוא מספר חיובי.

מאחר שגם $\boldsymbol{k}$ הוא חיובי, המספר $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ אף הוא חיובי.

לכן $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) > 0$.

כלומר $\boldsymbol{kb} - \boldsymbol{ka} > 0$.

לכן $\boldsymbol{kb} > \boldsymbol{ka}$, או $\boldsymbol{ka} > \boldsymbol{kb}$.

- באותו אופן, אם $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ ואם $\boldsymbol{k}$ הוא מספר **שלילי**, אז $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ הוא מספר שלילי.

מאחר שגם $\boldsymbol{k}$ הוא שלילי, המספר $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ הוא חיובי. לכן $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) > 0$. כלומר $\boldsymbol{ka} - \boldsymbol{kb} < 0$.

לכן $\boldsymbol{ka} > \boldsymbol{kb}$.

1. המספר האמצעי לא יכול להיות הקטן ביותר, כיוון שמגיעים 4 חיצים. הוא לא יכול להיות הגדול ביותר, כיוון שיוצאים ממנו שני חיצים. לכן הוא חייב להיות 2.5. יש 4 מספרים קטנים ממנו ושני מספרים גדולים ממנו. בשורה הראשונה המספרים הם 7 ,10 ,5-. בשורה התחתונה- 3,0,1-.

2. אפשר לפתור את המשימה בדרכים שונות, למשל כך:

א) לפי המאזניים הימניים:

$D + A > C + B$. ולפי המאזניים האמצעיים מתקיים:

$D + B = C + A$. מכאן מקבלים על-ידי חיבור:

$2D + A + B > 2C + A + B$

לכן $2D > 2C$, כלומר $D > C$.

ב) לפי המאזניים השמאליים:

$D + C < A + B$. ולפי המאזניים האמצעיים מתקיים:

$D + B = A + C$. מכאן מקבלים על-ידי חיבור:

$2D + B + C < 2A + B + C$

לכן $2D < 2A$, כלומר $D < A$.

ג) מכיוון ש: $D > C$ ו: $D + B = C + A$

מתקבל $A > B$.

ד) לפי הנתונים $B > D$. לכן: $A > B > D > C$.

4. דוגמה: $\frac{x}{4} < \frac{x}{2} - \frac{5}{4}$ $\quad \frac{x}{6} < \frac{x}{3} - \frac{5}{6}$.

5. נחלק את שני האגפים ב- ab.