יב. מערכות משוואות עם שני נעלמים

רקע

בפתרון מערכות משוואות של שני נעלמים נדרש שימוש במגוון כלים שהתלמידים למדו בפרקים הקודמים: בפרקים ג' ו- ט' נלמדו שיטות שונות לפתרון משוואות מהמעלה הראשונה בנעלם אחד; בפרק ד' עסקו התלמידים בנושא פונקציות ליניאריות. (משוואת פונקציה ליניארית היא מקרה פרטי של משוואה מהמעלה הראשונה עם שני נעלמים.) כמו-כן הם למדו כיצד מייצגים פונקציה ליניארית במערכת צירים. אך כל אותם הכלים עדיין אינם מספיקים לפתור מערכות משוואות בתחילת הפרק הנוכחי. קודם כול, יש לענות על שאלות בסיסיות יותר כגון: מהי משוואה של שני נעלמים? האם קיים צורך במשוואה מסוג זה? מהי מערכת משוואות? מדוע פותרים שתי משוואות, ולא מסתפקים במשוואה אחת בלבד? נוסף על כך יש לדון לעומק בעניינים טכניים חדשים.

דוגמה: כאשר פותרים את מערכת המשוואות $\begin{cases} ① \; 2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} = 7 \\ ② \; 3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 8 \end{cases}$ לפי שיטת השוואת המקדמים,

יש לבצע את החישובים הבאים כדי למצוא את הנעלם $\boldsymbol{y}$.

$$\begin{cases} ① \; 6\boldsymbol{x} + 9\boldsymbol{y} = 21 \\ \quad\; - \quad\; - \quad\; - \\ ② \; 6\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} = 16 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 5\boldsymbol{y} = 5 \quad}$$

כאן נבנתה משוואה חדשה שהאגף השמאלי שלה הוא ההפרש בין האגפים השמאליים של המשוואות:

$6\boldsymbol{x} + 9\boldsymbol{y} = 21$ ו- $6\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} = 16$, והאגף הימני שלה הוא ההפרש בין שני האגפים הימניים של אותן משוואות. כמובן, התלמידים עדיין לא עסקו בחישובים מסוג זה בכיתות הקודמות. הנושאים האלה יידונו בשיעורים הראשונים של הפרק.

- בשיעור הראשון יוצגו לתלמידים דוגמאות למשוואות של שני נעלמים, ובפרט דוגמאות למשוואות מהמעלה הראשונה בשני נעלמים, בשיעור זה דנים בנושא ייצוג גרפי של משוואה מהמעלה הראשונה בשני נעלמים ובמציאת פתרונות למשוואה של שני נעלמים.
- בשיעור השני חוזרים על תכונות השוויון, ומרחיבים את הידע ב"חיבור" וב"חיסור" של משוואות, כפי שהודגם לעיל.
- בשיעור השלישי מוצג המושג "מערכת משוואות". התלמידים ילמדו לזהות את הפתרון של מערכת משוואות נתונה ולבנות מערכת משוואות שקולה למערכת משוואות נתונה.
- השיעור הרביעי יוקדש לפתרון מערכות משוואות בדרך גרפית, בתוך כדי עיון במספר הפתרונות האפשרי למערכת משוואות מהמעלה הראשונה (פתרון אחד ויחיד או אין-סוף פתרונות או אפס פתרונות). ייצוג גרפי ממחיש את המשמעות של פתרון מערכת משוואות באופן חזותי וידידותי ובעיקר מאפשר לחקור ולאפיין את מספר הפתרונות של מערכת נתונה. לכן כל המקרים האפשריים מוצגים בכלליותם, לפני שהתלמידים עוסקים בחישובים ממוקדים למערכות ספציפיות. נוסף על כך, קיים סיכון שאם התלמידים ידעו את דרכי הפתרון האלגבריות, הם לא יתעניינו בפתרון הגרפי, שנדרש בו יותר זמן, והוא פחות מדויק.
- בשיעור החמישי יפתרו התלמידים מערכות משוואות על-ידי חיבור וחיסור, ללא השוואה של מקדמים.
- בשיעור השישי יגלו התלמידים את שיטת השוואת המקדמים;
- בשיעור השביעי תוצג השיטה לפתרון מערכות משוואות על-ידי הצבת נעלם.

בכל הסוגיות המוקדשות לפתירת מערכות משוואות יובאו מספר שאלות מילוליות הקשורות לנושא הנלמד.

מומלץ להקדיש לפרק כ-12 שעות לימוד.

הקשיים העיקריים שבהוראת הפרק

- לעתים קשה למורים לעורר את העניין של התלמידים לאורך פרק שיש בו חישובים רבים.
- יש תלמידים שאינם שולטים בכלים הנדרשים בתחילת הפרק או מקצתם: פתרון משוואה של נעלם אחד, ייצוג גרפי של פונקציה ועוד.
- קיימות צורות כתיבה שקולות המבטאות את הקשר בין שני משתנים. לדוגמה, $x + y = 5$ שקול ל- $y = 5 - x$ (ולכן שתי המשוואות מיוצגות על-ידי אותו גרף). אך לשתי צורות אלה אין אותה משמעות: במקרה $x + y = 5$ יש לשני המשתנים אותו מעמד, אך במקרה $y = 5 - x$ קיימת תלות בין שני המשתנים: המשתנה x הוא משתנה חופשי, ואילו y הוא משתנה תלוי.
- פתירת מערכת משוואה היא באופן טבעי תהליך רב-שלבי, הדורש **תכנון** נבון ובחירת שיטת פתרון מתאימה.
- בשיטה של חיבור וחיסור של משוואות (וכן בשיטה של השוואת המקדמים) השימוש בסימן "מינוס" מהווה קושי ידוע ומתמיד.
- בשיטה של השוואת המקדמים חלק מהתלמידים "שוכחים" לכפול את אחד המחוברים המופיעים במשוואה.
- בשיטה של הצבת הנעלם השימוש בסוגריים הוא אחד המכשולים העיקריים.
- חלק מהתלמידים מתקשים להבין את היסוד של הצבת **ביטוי** (במקום הצבת **מספר** "רגיל") בשיטה של הצבת הנעלם.
- בשל אורך פתירת מערכת משוואות יש תלמידים שאינם בודקים את תוצאותיהם.
- קשה להבין ולתרגם שאלות מילוליות בשני משתנים לצורה מתמטית.

מושגים ומונחים

נעלם, פתרון משוואה בנעלם אחד, משוואה של שני נעלמים (מהמעלה הראשונה), הצבה, פתרון משוואה של שני נעלמים, ייצוג גרפי של משוואה בשני נעלמים, פונקציה קווית, משוואות שקולות, מערכות משוואות שקולות, פתרון מערכת משוואות, ייצוג גרפי של מערכת משוואות, ישרים נחתכים, ישרים מקבילים, ישרים מתלכדים, תכונות השוויון, חיבור שוויונות/משוואות, חיסור שוויונות/משוואות, השוואת מקדמים, הצבת ביטוי במקום משתנה, הצבת נעלם, בדיקה על-ידי הצבה, פתרון שאלה מילולית.

מטרות

התלמידים ידעו:

א. לזהות משוואה של שני נעלמים מהמעלה הראשונה;
ב. להציג במערכת צירים משוואה של שני נעלמים מהמעלה הראשונה;
ג. למצוא פתרונות למשוואה של שני נעלמים מהמעלה הראשונה;
ד. לבנות שוויון שלישי, כאשר נתונים שני שוויונות (או משוואות), כך: האגף השמאלי יהיה הסכום של האגפים השמאליים והאגף הימני יהיה הסכום של האגפים הימניים של השוויונות (או המשוואות) הנתונים ("לחבר שני שוויונות/משוואות");
ה. לבנות שוויון שלישי, כאשר נתונים שני שוויונות (או משוואות), כך: האגף השמאלי יהיה ההפרש בין האגפים השמאליים והאגף הימני יהיה ההפרש בין האגפים הימניים של השוויונות (או המשוואות) הנתונים ("לחסר שני שוויונות/משוואות");
ו. לכתוב מערכת משוואות המתאימה להקשר מילולי נתון;
ז. לכתוב מערכת משוואות שקולה למערכת משוואות נתונה;
ח. לפתור מערכת משוואות על-ידי ייצוג גרפי, ובפרט לפרש בצורה נכונה את המצב ההדדי של שני הישרים המייצגים את המשוואות הנתונות:
- ישרים נחתכים: פתרון אחד ויחיד,
- ישרים מתלכדים: אין-סוף פתרונות,
- ישרים מקבילים: אין פתרון;

ט. לפתור מערכת משוואות על-ידי חיבור או חיסור של המשוואות הנתונות;
י. לפתור מערכת משוואות על-ידי השוואת המקדמים לפני החיבור או החיסור של המשוואות הנתונות;
יא. לפתור מערכת משוואות על-ידי השיטה של הצבת הנעלם;
יב. לפתור שאלות מילוליות הקשורות לנושא הנלמד.

א. משוואה של שני נעלמים, עמ' 149

מגלים

מטרת פעילויות אלה היא להסב את תשומת לבם של התלמידים למספר עובדות חשובות בפרק הנוכחי.

- משתמשים במשוואות של שני נעלמים כדי לתאר תופעות פשוטות יחסית. כאן המשוואה $3x + 2y = 11$ מייצגת את אורך מסלול הריצה כפונקציה של שני הנעלמים (סעיף ג').
- בניגוד למשוואות של נעלם אחד, אין פתרון אחד ויחיד למשוואה מהסוג $3x + 2y = 11$ (סעיפים א'-ב').
- בין שני הנעלמים המופיעים במשוואה של שני נעלמים אין בהכרח תלות. כאן אף-על-פי שקיים קשר בין שני הנעלמים x ו- y, אין לומר כי הנעלם y תלוי מבחינה לוגית בנעלם x או להפך (סעיף ג').
- אפשר לחשב פתרונות למשוואה של שני נעלמים על-ידי הצבת ערך כלשהו באחד הנעלמים במשוואה הנתונה (סעיפים ד'-ה').
- אפשר לבטא את אחד הנעלמים באמצעות הנעלם האחר (סעיפים ו'-ח'). ביטוי כזה הוא מלאכותי ואף מקשה את החישובים.
- הייצוג הגרפי של משוואה מהמעלה הראשונה בשני נעלמים הוא קו ישר שיכול לעזור לתלמידים למצוא פתרונות למשוואה הנתונה (סעיף ז').

לומדים

בתחילת השיעור מוצגות מספר משוואות בשני נעלמים, קצתן מהמעלה הראשונה. משוואות אלה מתארות קשרים פשוטים בין שני משתנים בהקשרים שונים.

בסעיף "**משוואה עם שני נעלמים מהמעלה הראשונה**" מוסבר לתלמידים כיצד מבחינים בין משוואה של שני נעלמים מהמעלה הראשונה לבין משוואה של שני נעלמים שאינה מהמעלה הראשונה. (בהמשך הפרק עוסקים אך ורק במשוואות מהמעלה הראשונה.)

מתרגלים

1. משוואות א',ב' הן משוואות מהמעלה הראשונה. במשוואה ג' קל לראות שהמשוואה היא מהמעלה השנייה.

2. משוואות א',ב' הן משוואות מהמעלה הראשונה. משוואה ג' איננה מהמעלה הראשונה.

3. א) $2x+2y=12$ או $2(x+y)=12$.   ב) $5(x+y)=30$ או $5x+5y=30$.   ג) $2x+4y=24$.

לומדים

בחלק זה של השיעור מוצגות דרכים שונות לייצג משוואה מהמעלה הראשונה במערכת צירים. התלמידים צריכים להיות מודעים לכך שאין חובה להפוך משוואה נתונה למשוואה מהצורה $y = ax + b$ כדי לייצג אותה.

מתרגלים

4. בסעיפים א' ו-ב' יש להציב את המספר הנתון במקום x ולחשב את y. בסעיפים ג' ו- ד' יש להציב את המספר במקום y ולחשב את x.

בתרגילים 5 ו- 8 הייצוג הגרפי של משוואות בשני נעלמים מהמעלה הראשונה הוא קו ישר. הקשר הוא דו-צדדי. כל נקודה על הגרף היא פתרון המשוואה. כל פתרון של המשוואה נמצא על הגרף.

5. א) הנקודה A נמצאת על הישר המייצג את המשוואה, ולכן היא פתרון המשוואה. ב) כן.
ג) הנקודה B אינה נמצאת על הישר המייצג את המשוואה, ולכן היא אינה פתרון המשוואה. ד) לא, כיוון שהנקודה אינה פתרון המשוואה, אי-אפשר לצפות אותה.

6. כדי להתאים לכל משוואה את הייצוג הגרפי שלה, אפשר לבחור נקודה על הישר ולבדוק באיזו משוואה שיעורי הנקודה הם פתרון. א) 3. ב) 1. ג) 4. ד) 2.

8. אם שיעורי הנקודה הם פתרון המשוואה, הייצוג הגרפי יעבור דרך הנקודה. אפשר לסרטט את הישרים לצורך בדיקה. בסעיפים א', ג', ד' ו- ה' הנקודה נמצאת על הישר המייצג את המשוואה.

לומדים

כאן דנים בסימונים האפשריים לפתרונות של משוואה של שני נעלמים ובדרכים שונות למצוא פתרון למשוואה נתונה עם שני נעלמים. יש לציין כי כל פתרון של משוואה בשני נעלמים מורכב מ**שני** מספרים.

מתרגלים

9. יש להציב במשוואות את המספרים הנתונים ולבדוק אם מתקבל שוויון שמתקיים. בסעיפים א׳, ג׳, ד׳ ו- ו׳ השוויון מתקיים.

בתרגילים 10 - 11 אפשר לתת הרבה מאוד תשובות. קל להציב 0 פעם אחת במקום x ופעם אחת במקום y.

12. יש הרבה מאוד אפשרויות לפתרון. הפתרונות צריכים להיות חיוביים.

13. דבורה אינה צודקת. שני המספרים הם פתרון אחד של המשוואה. מאחר שיש שני נעלמים, כל פתרון הוא זוג מספרים.

14. יוסי צודק.

ב. תכונות נוספות של השוויון, עמ׳ 157

מגלים

המטרה הכללית של פעילויות אלה היא להראות א) כי אפשר לתרגם מצבים מסוימים מחיי היום יום על-ידי משוואות מהמעלה הראשונה; ב) כי אפשר ״לחבר״ שתי משוואות או ״לחסר״ שתי משוואות או ״לכפול״ משוואה במספר נתון כדי לענות על שאלות פשוטות, בלי לפתור מערכות משוואות.

בפעילות 1 אין שימוש במשוואות כלל, אלא חישובים פשוטים ואינטואיטיביים: כפל (סעיף א׳), חיבור (סעיף ד׳) וחיסור (סעיף ה׳). כדי לענות על סעיף ג׳ יהיו תלמידים שינסו למצוא דרך (מוטעית!) לחשב את המחיר של 8 ק״ג תפוחים ועוד 3 ק״ג בננות על-ידי מניפולציות של הנתונים.

בפעילות 2 התלמידים מתבקשים לתרגם לשפה מתמטית את הנתונים של פעילות 1 (סעיפים א׳-ב׳), ולמצוא כיצד פעולות הכפל, החיבור והחיסור שהם ביצעו קודם לכן, באות לידי ביטוי בצורה אלגברית (סעיפים ג׳-ה׳). כבר בשלב הזה אפשר להציע לתלמידים דרכים נוחות לכתיבת חיבור משוואות או חיסור משוואות. התלמידים יעשו שימוש רב בשיטות הנלמדות כאן בשיעורים ה׳-ו׳ שבהמשך הפרק.

לומדים

בחלק הראשון של השיעור מזכירים לתלמידים כי מותר לכפול/לחלק באותו מספר (שונה מ- 0) את שני האגפים של משוואה נתונה. התלמידים אמורים להכיר את הפעולות הללו, ובכל זאת הם לעתים אינם כופלים את שני האגפים של משוואה נתונה במספר נתון בצורה לא נכונה, בעיקר כאשר אחד האגפים (או שניהם) הוא סכום או הפרש.

למשל, הם עלולים לכתוב כך:

$$2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 5 \quad |\cdot 3$$

$$6\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 15$$

במקום כך: $6\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} = 15$. זאת אחת הטעויות הנפוצות ביותר בפתרון מערכות משוואות בשיטה של השוואת המקדמים.

מתרגלים

בתרגילים 15 - 17 יש לכתוב משוואה לנתון הראשון. המשפט השני הוא כפולה של המשוואה הראשונה במספר.

15. א) המחיר של 3 ק״ג תפוחי-אדמה ו-3 ק״ג בננות הוא 27 ₪. ב) $x+y=9 \;|\bullet 3$ $3x+3y=27$.

16. א) מחיר 20 זוגות גרביים ו-8 חולצות T הוא 800 ₪. ב) $5x+2y=100 \;|\bullet 4$ $20x+8y=400$.

17. יש לשים לב שצריך לכפול את כל הביטויים בשני האגפים.

18. א) 10 קרואסונים זולים מ-5 עוגות שמרים ב-50 ₪. ב) $y-2x=10 \;|\bullet 5$ $5y-10x=50$.

בתרגילים 21 ו- 25 יש לכתוב משוואות לשני הנתונים הראשונים. המשפט האחרון הוא סכום שתי המשוואות.

19. טיפול בשגיאות נפוצות. התיקון יכול לעזור במניעת שגיאות בהמשך. א) השגיאה היא שהביטוי 3y לא נכפל ב- 3. ב) המספר 3 לא הוכפל ב- 2. צ״ל $2x+12y=6$. ג) תוצאת הכפל של 0 ב- 4 היא 0, צ״ל $40x-4y=0$.

לומדים

כאן מזכירים לתלמידים פעולות מותרות בשוויון נתון, שנלמדו בכיתה ז׳: הוספת מספר לשני האגפים של השוויון, חיסור אותו מספר משני האגפים. לאחר מכן מציגים באופן פורמלי שתי פעולות חדשות, כפי שראו התלמידים בפעילויות הגילוי: חיבור וחיסור של משוואות. הצגת פעולות אלה מלווה בדוגמאות לכתיבת חיבור וחיסור של משוואות בדרכים שונות.

יש לציין כי לעתים השימוש בסימן ״מינוס״ יכול להקשות על התלמידים – בעיקר כאשר הם משתמשים ב״חיבור בטור״ או ב״חיסור בטור״ (״דרך ב״ בשיעור).

דוגמאות של טעויות נפוצות:

$$\begin{array}{r} x - 7y = -1 \\ + \quad + \quad + \\ \underline{6x + 2y = -4} \\ 7x - 9y = -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 7y = -1 \\ - \quad - \quad - \\ \underline{6x + 2y = -4} \\ -5x - 5y = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 7y = -1 \\ - \quad - \quad - \\ \underline{6x + 2y = -4} \\ -5x - 9y = -5 \end{array}$$

כדי להסביר לתלמידים את הטעויות שלהם רצוי לכתוב בנפרד את הפעולות הרלוונטיות הנכונות/המתוקנות.

- בדוגמה הראשונה $-7 + (+2) = -5$ (ולא -9);
- בדוגמה השנייה $-7 - (+2) = -9$ (ולא -5).

וכו׳.

בהקשר זה ייתכן שתלמידים יטעו פחות, אם הם יחברו או יחסרו משוואות בדרך הפורמלית יותר המוצגת בשיעור (״דרך א״). הנה דוגמה:

דרך א׳:

① $2x + 3y = 5$

② $-5x + 4y = -9$

מחסרים ומקבלים:

$$2x + 3y - (-5x + 4y) = 5 - (-9)$$

פותחים את הסוגריים:

$$2x + 3y + 5x - 4y = 5 + 9$$

$$7x - y = 14$$

מתרגלים

20. לפי תכונות השוויון מותר לחבר שני שוויונות. לכן בשני הסעיפים המספר החסר הוא 19, אמנם באגף שמאל הצורות ומספרן שונים אבל המספרים באגף ימין שווים.

21. נחבר את המשוואה $5x+6y=44$ עם המשוואה $5x+4y=40$, ונקבל $10x+10y=84$. המחיר של 10 ק״ג תפוחי אדמה ו-10 ק״ג בננות הוא 84 ₪.

בתרגילים 23, 24, 26, 30, 31 יש לחבר/לחסר את המשוואות. כדאי לכתוב את המשוואות זו מתחת זו, כאשר הנעלמים בצד אחד של השוויון, והמספרים בצד האחר.

25. נחבר את המשוואה $3x+2y=350$ עם המשוואה $2x+y=200$, ונקבל $5x+3y=550$. המחיר של 5 חצאיות ו-3 סוודרים הוא 550 ₪.

27. נחסר מהמשוואה השנייה $2x-10{,}000=y$ את המשוואה $x+40{,}000=y$, ונקבל $x=50{,}000$. מחיר מכונית הוא 50,000 ₪.

28. נחבר את המשוואה המתארת את דרכו של מר כהן $2x+2y=190$ עם המשוואה המתארת את דרכו של מר לוי $x+2y=127$, ונקבל $3x+4y=317$, שזו דרכו של מר ישראלי.

29. נסמן את אורך הקטע $AB=x$ ואת אורך הקטע $CD=y$. מהמשוואה $3x+2y=18$ המתארת את היקף החץ הירוק,נחסר את המשוואה $2x+3y=17$ המתארת את היקף החץ הכתום ונקבל $x-y=1$. כלומר ההפרש בין AB לבין CD הוא 1 ס״מ.

32. טיפול בשגיאות נפוצות. התיקון יכול לעזור במניעת שגיאות בהמשך. א) $-y + y = 0$. צ״ל $2x = 22$. ב) יש שגיאה בחיבור הביטוי השני. צ״ל $5x-2y=7$. ג) יש שגיאה בחיסור באגף שמאל, צ״ל $-9x-10y=-4$.

ג. מערכות משוואות, עמ' 164

מגלים

לאחר שהתלמידים רכשו את הכלים האלגבריים הרלוונטיים הם יכירו את המושג "מערכת משוואות". זוג משוואות שמחפשים את הפתרון המשותף שלהן. בפעילות הנוכחית יגלו התלמידים כי קשה יחסית לקבוע פתרון משותף לשתי משוואות של שני נעלמים (סעיפים א'-ב'-ד'), ויבינו כי יש צורך לפתח שיטות "מתקדמות" כדי לפתור שאלה מסוג זה.

בסעיף ג' מושם הדגש על כך שפתרון משותף לשתי משוואות נתונות פירושו: "אותו x ואותו y", כלומר פתרונות לשתי המשוואות שערך של נעלם אחד בלבד שלהם אינו נחשב כפתרון המערכת.

בשאלה האחרונה על המורה לבקש מהתלמידים "לנחש" שהפתרון (5,2) הוא הפתרון המשותף היחיד של שתי המשוואות הנתונות. אפשר לשאול את התלמידים כמה פתרונות למשוואה $x - y = 3$, למשל: (3,0), (4,1), (5,2), (6,3), (7,4) וכו' ולאחר מכן להציב את הערכים האלה באגף השמאלי של המשוואה $3x + 2y$.

בפתרון (3,0) מקבלים $3\cdot\mathbf{3} + 2\cdot\mathbf{0} = 9$;

בפתרון (4,1) מקבלים $3\cdot\mathbf{4} + 2\cdot\mathbf{1} = 14$;

בפתרון (5,2) מקבלים $3\cdot\mathbf{5} + 2\cdot\mathbf{2} = 19$;

בפתרון (6,3) מקבלים $3\cdot\mathbf{6} + 2\cdot\mathbf{3} = 24$;

בפתרון (7,4) מקבלים $3\cdot\mathbf{7} + 2\cdot\mathbf{4} = 29$;

באופן אינטואיטיבי אפשר לומר שככל שהפתרון של המשוואה ① "מתרחק" מ- (5,2), כך הערך של הביטוי $3x + 2y$ "מתרחק" מ- 19. לכן סביר להניח כי קיים אך ורק פתרון אחד משותף לשתי המשוואות הנתונות.

לומדים

לא נלמדות כאן שיטות לפתרון מערכות משוואות, אלא ניתנים כלים בסיסיים יותר שהתלמידים ישתמשו בהם בשיעורים הבאים.

- מהי מערכת משוואות של שני נעלמים? כיצד מסמנים אותה?
- מהו פתרון של מערכת משוואות? כיצד אפשר לוודא כי זוג מספרים נתון הוא פתרון של מערכת משוואות של שני נעלמים נתונה?

מתרגלים

בתרגילים 33 - 34 יש להציב את הפתרון בשתי המשוואות ולוודא ששני השוויונות מתקיימים.

33. בסעיפים א', ב' ו- ד' זוג המספרים הוא פתרון שתי המשוואות. יש לשים לב שבסעיף ה' הזוג הוא פתרון של המשוואה הראשונה בלבד.

34. א) B. ב) D. ג) A. ד) C.

לומדים

כאן מובאות דוגמאות בסיסיות ליצירת מערכת משוואות שקולה למערכת משוואות נתונה.

לא נלמדות כאן כל הדרכים האפשריות לבניית מערכת משוואות שקולה למערכת משוואות נתונה, ובעיקר אין התייחסות למערכת משוואות כזו:

$$\begin{cases} ① & x + y = 5 \\ ② & 2x - y = 1 \end{cases} \quad \text{שקולה למערכת} \quad \begin{cases} ① & x + y = 5 \\ ①+② & 3x = 6 \end{cases}$$

הסיבה לכך היא שבמציאות, כאשר מחברים או מחסרים שתי משוואות של מערכת נתונה, מתקבלת משוואה שיש בה נעלם אחד בלבד (ראו דוגמה לעיל), ופותרים אותה. לכן אין צורך לשמור על מערכת שלמה השקולה למערכת המקורית. יתר על כן, כתיבת שתי משוואות בכל שלב ושלב של תהליך הפתירה מכבידה מאוד על התלמידים ואינה מאפשרת לחבר או לחסר את המשוואות בנוחות, בעיקר כאשר משתמשים בשיטת "חיבור בטור" שהוצגה בשיעור הקודם. במילים אחרות, אם כותבים:

$$\begin{cases} ① & x + y = 5 \\ ② & 2x - y = 1 \end{cases}$$
$$3x \quad = 6$$

אין דרך נוחה לכתוב ליד סכום המשוואות את המשוואה ① בתוך כדי שמירה על סדר המשוואות.

לפיכך מתייחסים כאן למערכות משוואות שקולות רק אם מחליפים אחת מהמשוואות במשוואה השקולה לה, ובעיקר אם מחליפים אחת מהמשוואות במכפלתה במספר נתון שונה מ- 0.

מתרגלים

35. א) שתי מערכות המשוואות שקולות . המשוואה הראשונה זהה בשתי המערכות, המשוואה השנייה של מערכת ב׳ שקולה למשוואה השנייה של מערכת א׳. ב) המערכות אינן שקולות. המשוואה השנייה אמנם זהה בשתי המערכות, אבל המשוואה הראשונה אינה שקולה. ג) שתי מערכות המשוואות שקולות. המשוואה השנייה זהה בשתי המערכות, המשוואה הראשונה של מערכת ב׳ שקולה למשוואה הראשונה של מערכת א׳.

36. א) שתי מערכות המשוואות שקולות . המשוואה השנייה זהה בשתי המערכות המשוואה הראשונה של מערכת ב׳ שקולה למשוואה הראשונה של מערכת א׳. ב) שתי מערכות המשוואות שקולות. המשוואה הראשונה זהה בשתי המערכות, המשוואה השנייה של מערכת ב׳ שקולה למשוואה השנייה של מערכת א׳. ג) המערכות אינן שקולות. המשוואה הראשונה אמנם זהה בשתי המערכות, אבל המשוואה השנייה אינה שקולה.

ד. פתרון מערכות משוואות באמצעות ייצוג גרפי, עמ׳ 170

מגלים

מטרת הפעילות היא לעזור לתלמידים להבין את הרעיון העיקרי של פתרון מערכת משוואות מהמעלה הראשונה בדרך גרפית: שני המספרים המרכיבים את הפתרון הם השיעורים של נקודת החיתוך של הגרפים המייצגים את המשוואות.

א) הגרף המייצג את המשוואה $2\boldsymbol{x} + 5\boldsymbol{y} = 25$ עובר דרך הנקודות (0,5) ו- (10,1).

ב) הגרף המייצג את המשוואה $4\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 26$ עובר דרך הנקודות (0,13) ו- (4,5).

ג) יפית ומעיין צודקות: כל פתרון של המשוואה $2\boldsymbol{x} + 5\boldsymbol{y} = 25$ מיוצג על-ידי נקודה הנמצאת על הישר $\boldsymbol{s}$, וכל פתרון של המשוואה $4\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 26$ מיוצג על-ידי נקודה הנמצאת על הישר $\boldsymbol{t}$. לכן הנקודה A המייצגת פתרון משותף לשתי המשוואות נמצאת על שני הגרפים.

ד) השיעורים של הנקודה A הם (5,3).

ה) מחירו של חטיף הוא 5 ₪ ומחירה של סוכרייה הוא 3 ₪. בדיקת הפתרון על-ידי הצבה במערכת המקורית חשובה מכיוון שהסרטוטים של התלמידים אינם תמיד מדויקים. במילים אחרות, בזכות הבדיקה מוסר כל ספק ביחס לדיוק הפתרון.

לומדים

כעת אנו חוזרים באריכות על שיטת הפתרון של מערכת משוואות על-ידי ייצוג גרפי, ומובאת דוגמה. לאחר מכן דנים בשני מקרים פרטיים שיש בהם אין-סוף פתרונות או אין כלל פתרון למערכת הנתונה. עקרונות השיטה ומגבלותיה מסוכמים בסוף השיעור. אפשר להפנות את התלמידים לסיכום זה, אם הם מתקשים לפתור את התרגילים המופיעים בהמשך. יש לציין כי כמה תרגילים יוקדשו לנושא מגבלות השיטה (כמו שאלה 40) כדי שהתלמידים יפנימו כי יש צורך בפיתוח שיטות מדויקות ובטוחות יותר לפתרון תרגילים.

מתרגלים

בתרגילים 37 - 39 יש לכתוב מערכת משוואות שקולה למערכת הנתונה. בתרגילים 35 - 36 יש הצעה כיצד להגיע למערכת שקולה. בתרגיל 37 התלמידים צריכים להציע דרך משלהם. יש מספר אפשרויות.

40. הייצוג הגרפי מאפשר לזהות בקלות את מספר הפתרונות שיש למערכת משוואות. הייצוג הגרפי עוזר גם להבנת האפשרויות השונות של פתרון מערכת המשוואות. בסעיפים א׳,ב׳ ,ד׳ ו-ה׳ הישרים נחתכים, נקודת החיתוך היא הפתרון היחיד של מערכת המשוואות. בסעיף ד׳ נקודת החיתוך נמצאת מחוץ לאזור המסורטט. נקודת החיתוך היא (12,-33). ייתכן שחלק מהתלמידים יתקשו לראות שהישרים אינם מקבילים. בסעיף ג׳ הישרים מקבילים ולכן אין פתרון למערכת המשוואות. בסעיף ו׳ הישרים מתלכדים, לכן יש אין-סוף פתרונות. כל נקודה על הישר המסורטט היא פתרון.

41. בסעיפים א׳, ב׳, ד׳ ו- ה׳ יש פתרון יחיד, שהוא נקודת החיתוך של שני הישרים. בסעיף ג׳ הישרים מתלכדים, יש אין-סוף פתרונות. כל נקודה על הישר המסורטט היא פתרון. בסעיף ו׳ הישרים מקבילים, לפיכך אין פתרון.

42. פתרון בעזרת ייצוג גרפי נוח מאוד למשוואות שפתרונן הוא מספרים שלמים בתוך התחום המסורטט, בדרך-כלל באזור הקרוב לראשית הצירים. במקרים אחרים הייצוג הגרפי אינו מסייע בפתרון מדויק.

43. נסמן את המספרים ב-x וב- y. נקבל שתי משוואות: x+y=6 ו x-y=2. המספרים הם 4 ו-2.
44. נקודת החיתוך של הישרים אינה מספר שלם, ולכן קשה למצוא את הפתרון המדויק מתוך הייצוג הגרפי.

א) $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.   ב) $(\frac{3}{4},-3\frac{1}{4})$.   ג) $(6\frac{2}{3},16\frac{2}{3})$.

45. כדי שהפתרון יהיה (0,0), המשוואות צריכות להיות מהסוג y = ax ו- y = bx.
46. נסמן את המספרים ב-x וב- y. נקבל שתי משוואות: x+y=-2 ו x-y=6. המספרים הם 2 ו- 4-.
47. נסמן את גילה של שרה ב-x ואת גילו של עודד ב-y. נקבל שתי משוואות: x=2y ו x=y+4. שרה בת 8 ועודד בן 4.

ה. <u>פתרון מערכות משוואות באמצעות חיבור וחיסור</u>, עמ' 176

<u>מגלים</u>

בפעילות זו יפתרו התלמידים שאלות כאלה:

הסכום של שני מספרים הוא a, ההפרש ביניהם הוא b (a ו- b נתונים), מהם המספרים?

אפשר לכתוב את השאלה הזו בצורה אלגברית כך:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$$

תחילה (סעיפים א'-ה') יגלו התלמידים כי ככל שהמספרים a ו- b גדלים, כך קשה יותר לפתור שאלה מסוג זה בזמן מוגבל באופן אינטואיטיבי או על-ידי ניסוי וטעייה.

אחר-כך (סעיפים ו'-ח') יגלו התלמידים כי על-ידי חיבור המספרים a ו- b מתקבל המספר $2x$, בלי שימוש בחישובים אלגבריים פורמליים. כמו-כן הם יגלו כי ההפרש בין המספרים a ו- b שווה ל- $2y$. עובדות אלה מאפשרות לפתור בזמן קצר את שאלה ט' שיש בה מספרים "גדולים" יחסית (763 ו- 237).

בשאלה האחרונה (סעיף י') יגלו התלמידים את הקשר בין השאלות הקודמות לבין מערכות המשוואות. על המורה לעודד את התלמידים לפתור את המערכת הנתונה בדרך פורמלית, בתוך כדי שימוש בכלים שנרכשו בשיעורים הקודמים, ובעיקר בדרך של חיבור וחיסור של משוואות.

<u>לומדים</u>

אפשר להציג את הדוגמאות המובאות בשיעור בלי לדון בשאלה באילו מקרים שיטת החיבור/חיסור אפקטיבית ובאילו מקרים לא. בסיכום המופיע בסוף, מוסבר מתי יש לחבר שתי משוואות ומתי לחסר אותן כדי "להיפטר" מאחד הנעלמים.

כאמור, כל הכלים המתמטיים הרלוונטיים לפתירת מערכת משוואות על-ידי חיבור וחיסור כבר הוקנו לתלמידים בשיעורים הקודמים (ובפרט בשיעור ב'), לפיכך מטרת השיעור היא לעזור לתלמידים ליישם כלים אלה. כפי שצוין בשיעור ב', השימוש בטכניקות של חיבור (או חיסור) שתי משוואות כרוך בצורך לקביעה נכונה של הסימנים +/- של האיברים השונים המופיעים בסכומם (או בהפרש ביניהם). לכן אם התלמידים מתקשים במיומנויות אלה, מומלץ גם בשיעור זה לכתוב בנפרד את הפעולות הבעייתיות ביותר.

למשל, בדוגמה:

$$\begin{array}{rrcrcl} ① & x & + & y & = & 70 \\ & - & & - & & - \\ ② & x & - & y & = & 30 \\ \hline & & & 2y & = & 40 \end{array}$$

אפשר לכתוב בצד את הפעולה: $y-(-y)=2y$, אם יש צורך בכך.

הערה: בדוגמה זו, לאחר שימצאו את הערך של y (20), ייתכן שתלמידים אחדים ירצו להציב את הערך הזה במשוואה $2y=40$ (ולא באחת המשוואות $x+y=70$ או $x-y=30$). לכן יש להסב את תשומת לבם לכך שכדי להשלים את פתרון המערכת יש להציב את הערך של הנעלם שהם מצאו (כאן 20), במשוואה של שני הנעלמים.

בעת סיכום השיטה יש להדגיש כי התלמידים טרם למדו כיצד פותרים מערכת משוואות באופן כללי, כלומר כאשר שני המקדמים של כל נעלם אינם שווים ואינם נגדיים.

מתרגלים

48. כאשר המקדמים של אחד הנעלמים נגדיים יש לחבר את המשוואות,כאשר המקדמים שווים יש לחסר את המשוואות. הנעלם שמקדמיו אינם שווים או נגדיים הוא זה שנשאר. בסעיפים א', ד' ו-ה' יש לחסר. בסעיפים ב',ג' ו-ו' יש לחבר. בסעיף ו' יש לסדר תחילה את המשוואה הראשונה, נקבל: $4x-2y=2$.

49. מרים טעתה בחיסור המשוואות. $y-(-2y) = 3y$. לכן $3y = 9$ ← $y = 3$. ההמשך לפי הצעתה של מרים: הצבת הפתרון במקום y במשוואה הראשונה, כיוון שהיא פשוטה יותר. $x = 3$.
הפתרון הוא $x = 3, y = 3$. כדי למנוע שגיאות מסוג זה אפשר להיעזר בסוגריים.

50. בסעיפים א', ב' ו-ג' יש לחבר את המשוואות. בסעיף ד' אפשר לחבר או לחסר. בסעיפים ה' ו- ו' יש לחסר.

51. נסמן את המספרים ב- x וב- y. נקבל שתי משוואות: $x+y = 36$ ו- $x-y = 12$.
המספרים הם 24 ו- 12.

52. נסמן ב- x מחיר של 1 ק"ג חצילים, וב- y מחיר של 1 ק"ג בצל. נקבל שתי משוואות: $x+5y = 24$ ו- $x+3y = 18$ ← $x = 9$, $y = 3$. המחיר של 1 ק"ג בצל הוא 3 ₪, והמחיר של 1 ק"ג חצילים הוא 9 ₪.

53. נסמן את הבסיס הקטן ב- x ואת הבסיס הגדול ב- y. נקבל שתי משוואות: $x+3y = 18$ ו- $x+2 = y$ ← $y = 5$, $x = 3$. אורך הבסיס הגדול הוא 5 ס"מ, אורך הבסיס הקטן הוא 3 ס"מ.

54. כאשר המקדמים של אחד הנעלמים נגדיים, יש לחבר את המשוואות. כאשר המקדמים שווים, יש לחסר את המשוואות. א) יש לחבר את המשוואות. $y = 2$, $x = 5$. ב) יש לחסר את המשוואות. $x = 4$, $y = -1$.,. ג) יש לחסר את המשוואות. $y = 10$, $x = 5$. ד) יש לחסר את המשוואות. $y = 1$, $x = 2$. ה) יש לחבר את המשוואות. $y = 3$, $x = 20$. ו) יש לחבר את המשוואות. $y = 9$, $x = -2$.

55. נסמן את המספרים ב- x וב- y. נקבל שתי משוואות: $x+y = 4$ ו- $x-y = 10$. המספרים הם 7 ו- -3.

56. בסעיף ג' יש אין-סוף פתרונות. בחיבור המשוואות מקבלים $0x+0y = 0$.

57. לא כל זוג הוא פתרון המערכת, אלא זוג המספרים שהמשוואה מתקיימת בו. בייצוג גרפי של המערכת נקבל שני ישרים מתלכדים. רק נקודות הנמצאות על הישר הן הפתרון של מערכת המשוואות.

58. לסעיף ו' אין פתרון. בחיסור המשוואות נקבל $0 = -3$.

59. לסעיף ו' אין פתרון. בחיסור המשוואות נקבל $0 = 10$.

60. בסעיפים ד'- ו' יש לפתוח תחילה את הסוגריים לפי חוק הפילוג. ד) המשוואה השנייה לאחר פתיחת הסוגריים היא $5x-4y=24$. לאחר חיבור המשוואות נקבל $y = -1$, $x = 4$. ה) לאחר פתיחת הסוגריים נקבל $y=-2x-4$ ו- $y-4 = 3x-3$. לאחר חיסור המשוואות נקבל $y = -2$, $x = -1$. ו) $y = 10$, $x = 0$.

61. נסמן ב- x מחיר של שקית חלב טרי, וב- y מחיר של קרטון חלב עמיד. נקבל שתי משוואות $3x+2y = 27$ ו-$3x+4y = 39$ ← $y = 6$, $x = 5$. המחיר של שקית חלב טרי הוא 5 ₪, והמחיר של קרטון חלב עמיד הוא 6 ₪.

62. יש לשים לב להבדל בין מספר המטבעות לבין ערכם של המטבעות. נסמן את מספר המטבעות של 1 ₪ ב-x ואת מספר המטבעות של 2 ₪ ב-y. נקבל שתי משוואות: $x+y = 12$ ו- $x+2y = 16$ ← $y = 4$, $x = 8$. ליערה 8 מטבעות של 1 ₪ ו- 4 מטבעות של 2 ₪.

63. יש לשים לב להבדל בין מספר המטבעות לבין ערכם של המטבעות. נסמן את מספר המטבעות של 2 ₪ ב- x ואת מספר המטבעות של 5 ₪ ב- y. נקבל שתי משוואות: $2x+5y = 24$ ו- $2x = y$ ← $y = 4$, $x = 2$. לטליה 2 מטבעות של 2 ₪ ו- 4 מטבעות של 5 ₪.

64. נסמן את אורך הגינה ב- x ואת אורך הבריכה ב- y. נקבל שתי משוואות: $20x+20y = 1500$ ו- $20x-500 = 20y$ ← $y = 25$, $x = 50$. אורך הגינה הוא 50 מ', אורך הבריכה הוא 25 מ'.

65. נסמן את שטח המשולש ABC ב- x ואת שטח המשולש ADE ב- y. נקבל שתי משוואות: $y = 9x$ ו- $y-x = 48$ ← $x = 6$, $y = 54$. שטח המשולש ABC הוא 6 סמ"ר, שטח המשולש ADE הוא 54 סמ"ר.

ו. פתרון מערכות משוואות: השוואת מקדמים, עמ' 183

מגלים

בשלב הראשון - כמו בפעילות גילוי שבשיעור הקודם - יפתרו התלמידים את המשימה הנתונה בדרך אינטואיטיבית, ולא בדרך פורמלית.

- שני האיורים שבצד ימין מייצגים איזון נכון (סעיף א').

- מאחר שבשני איורים אלה מופיעות שש קוביות לבנות, ההפרש בין המשקלים (140 גר׳ ו- 240 גר׳) מתפרש בהפרש בין מספרי הקוביות השחורות (4 ו- 9).
- לכן המשקל של 5 קוביות שחורות (4 – 9) הוא 100 גר׳ (140 גר׳ – 240 גר׳) (סעיף ב׳).
- המשקל של כל קובייה שחורה הוא 20 גר׳, ולכן המשקל של כל קובייה לבנה הוא 10 גר׳ (סעיף ג׳).

בשלב השני ינסו התלמידים לפתור את המשימה על-ידי מערכת משוואות. כמובן לאחר שהם פתרו את המשימה בשלבים בשאלות הקודמות, יהיה להם קל יותר לכתוב את השלבים המתאימים של החישובים בצורה אלגברית. על המורה לעודד את התלמידים להקפיד על כתיבת חישובים בשפה מתמטית נכונה.

לומדים

ההבדל היחיד בין שיעור זה לבין השיעור הקודם הוא שלב השוואת המקדמים. בשלב זה שתי דרכים עיקריות נהוגות:

<u>דרך 1</u>: משווים את המקדמים על-ידי הכפלת המשוואות במספרים **חיוביים** בלבד.

אם בסוף התהליך מקבלים שני מקדמים נגדיים באחד הנעלמים, מחברים את שתי המשוואות המתקבלות.

<u>דוגמה</u>:

$$\begin{cases} ①\ 5\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} = 7 \\ ②\ 4\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ①\ 10\boldsymbol{x} - 6\boldsymbol{y} = 14 \\ ②\ 12\boldsymbol{x} + 6\boldsymbol{y} = 30 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} ①\ 10\boldsymbol{x} - 6\boldsymbol{y} = 14 \\ \quad + \quad + \quad + \\ ②\ \underline{12\boldsymbol{x} + 6\boldsymbol{y} = 30} \\ \quad 22\boldsymbol{x} \qquad = 44 \end{array}$$

אם מקבלים שני מקדמים שווים באחד הנעלמים, מחסרים את המשוואות.

<u>דוגמה</u>:

$$\begin{cases} ①\ 2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} = 80 \\ ②\ 3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ①\ 6\boldsymbol{x} + 9\boldsymbol{y} = 240 \\ ②\ 6\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} = 140 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} ①\ 6\boldsymbol{x} + 9\boldsymbol{y} = 240 \\ \quad - \quad - \quad - \\ ②\ \underline{6\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} = 140} \\ \qquad 5\boldsymbol{y} = 100 \end{array}$$

<u>דרך 2</u>: משווים את המקדמים כך שלאחר מכן תהיה אפשרות ״להיפטר״ מאחד הנעלמים על-ידי **חיבור** המשוואות (ולא חיסור). בשל כך ייתכן שיהיה צורך לכפול את אחת המשוואות במספר שלילי. שיטה זו יכולה להיות נוחה יותר לתלמידים חזקים, אך היא כרוכה בסיכונים רבים יותר של טעויות חישוב.

<u>דוגמה</u>:

$$\begin{cases} ①\ 2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} = 80 \\ ②\ 3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ①\ -4\boldsymbol{x} - 6\boldsymbol{y} = -160 \\ ②\ 9\boldsymbol{x} + 6\boldsymbol{y} = 210 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} ①\ -4\boldsymbol{x} - 6\boldsymbol{y} = -160 \\ \quad + \quad + \quad + \\ ②\ \underline{9\boldsymbol{x} + 6\boldsymbol{y} = 210} \\ \quad 5\boldsymbol{x} \qquad = 50 \end{array}$$

ההמשך של תהליך הפתירה ידוע לתלמידים, אך רצוי לחזור עליו בקצרה בעת פתירת הדוגמאות המופיעות בשיעור.

מתרגלים

66. יש כמה אפשרויות, וכדאי לבחור באפשרות הפשוטה ביותר: מציאת הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של המקדמים של אחד הנעלמים. א) כופלים את המשוואה הראשונה ב- 2 ומחברים את המשוואות. ב) כופלים את המשוואה השנייה ב- 3 ומחסרים את המשוואות. ג) כופלים את המשוואה הראשונה ב- 5 ואת השנייה ב- 3 ומחברים את המשוואות. אפשרות אחרת: כופלים את המשוואה הראשונה ב- 3 ואת השנייה ב- 2 ומחברים את המשוואות. ד) כופלים את המשוואה הראשונה ב- 7 ואת השנייה ב- 5, או את הראשונה כופלים ב- 9 ואת השנייה ב- 8, ומחסרים את המשוואות.

בתרגילים 67 ו- 72 יש הדרכה מדויקת כיצד לפתור את מערכת המשוואות. בתרגילים 68 ו- 73 על התלמידים למצוא בעצמם במה לכפול את המשוואות וכיצד להמשיך לפתור.

69. נסמן את אורך המלבן ב- x ואת רוחבו ב- y. נקבל שתי משוואות: $2x+2y = 24$ ו- $x-y = 2$ $\leftarrow$ $y = 5$, $x = 7$. אורך המלבן 7 ס״מ ורוחבו 5 ס״מ.

71. יש לשים לב ליחידות. אפשר לפתור הכול בס״מ או הכול במטרים. נסמן את גובהו של גבי ב- x ואת גובהו של אילן ב- y. נקבל שתי משוואות: $x-y = 12$ ו- $\frac{x+y}{2} = 178$ $\leftarrow$ $y = 172$, $x = 184$. גובהו של גבי הוא 1.84 מ׳, גובהו של אלון הוא 1.72 מ׳.

74. ו) יש אין-סוף פתרונות. אפשר לכפול את המשוואה הראשונה ב- 5 ואת המשוואה השנייה ב- 2. כדאי לכתוב את המשוואות זו מתחת זו כך ש- x יהיה מתחת ל- x וכן לגבי y.
מקבלים $10x+20y = 40$.

75. ו) יש אין-סוף פתרונות. אפשר לכפול את המשוואה הראשונה ב- 3 ואת המשוואה השנייה ב- 2.
מקבלים ש- $6x-18y=48$.

76. לא כל זוג הוא פתרון המערכת, אלא זוג המספרים שמתקיימת בו המשוואה. בייצוג גרפי של המערכת נקבל שני ישרים מתלכדים. רק נקודות הנמצאות על הישר הן פתרון מערכת המשוואות.

77. ו) אין פתרון. אפשר לכפול את המשוואה הראשונה ב- 5 ואת השנייה ב- 2. לאחר חיסור המשוואות נקבל $0=15$.

79. שתי המשוואות המתקבלות הן $4x+8y = 28$ ו- $2x+2y = 8$ $\leftarrow$ $y = 3$, $x = 1$.

80. נסמן ב- x את המחיר של 1 ק״ג מלפפונים וב- y את המחיר של 1 ק״ג פלפלים. נקבל שתי משוואות:
$2x+3y = 17$ ו-$3x+2y = 18$ $\leftarrow$ $y = 3$, $x = 4$. המחיר של 1 ק״ג מלפפונים הוא 4 ₪, המחיר של 1 ק״ג פלפלים הוא 3 ₪.

81. א) נסמן את אורך הקטע $AB = x$ ואת אורך הקטע $CD = y$. נקבל שתי משוואות: $3x+2y = 18$ ו- $2x+3y = 17$ $\leftarrow$ $y = 3$, $x = 4$. אורך הקטע AB הוא 4 ס״מ, אורך הקטע CD הוא 3 ס״מ.
ב) קיבלנו אותן משוואות ואותם פתרונות. בכל שאלה הנעלמים מייצגים פריטים שונים.

82. נסמן את נפחו של כל בקבוק ב- x ואת נפחה של כל כוס ב- y. נקבל שתי משוואות: $4x+10y = 8$ ו- $24+25y = 8$ $\leftarrow$ $y = 1/5$, $x = 1.5$. נפח כל בקבוק הוא 1.5 ליטר, נפח כל כוס הוא 1/5 ליטר.

83. נסמן את הגיל של חדווה ב- x ואת גילו של אבישי ב- y. נקבל שתי משוואות: $5y = 8x+3$ ו- $y = x+3$ $\leftarrow$ $y = 7$, $x = 4$. אבישי בן 7, חדווה בת 4.

ז. __פתרון מערכות משוואות באמצעות הצבת נעלם__, עמ׳ 190

__מגלים__

בפרקים קודמים וכן בכיתה ז׳ למדו התלמידים להציב בביטוי אלגברי **מספר** במקום משתנה. השיעור הנוכחי קשה יותר, משום שהפעם יתמודדו התלמידים עם הצורך להציב **ביטוי אלגברי** (ולא מספר) במקום משתנה. קושי נוסף הוא שכאשר פותרים מערכת משוואות בשיטה של הצבת נעלם, מקבלים **משוואה**, ולא שוויון מספרי כפי שמקבלים, למשל בעת בדיקת הפתרון של משוואה על-ידי הצבה.
בפעילות הגילוי המטרה היא להרגיל את התלמידים להציב ביטוי אלגברי בתוך ביטוי אלגברי אחר ולהבחין בין סוג הצבה זה לבין הצבת מספר בביטוי אלגברי.

בסעיף ב׳ יציבו התלמידים מספר ביטויים שונים במקום $\boldsymbol{x}$ ו- $\boldsymbol{y}$ בביטוי $5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

- אם הנתון הוא ״המספרים $\boldsymbol{x}$ ו- $\boldsymbol{y}$ שווים״, מקבלים: $5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = 6\boldsymbol{x}$.
- אם הנתון הוא ״מספר המטבעות של 1 ₪ גדול פי שניים ממספר המטבעות של 5 ₪״, מקבלים:

$5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 5\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x} = 7\boldsymbol{x}$.

- אם הנתון הוא ״$\boldsymbol{x}$ גדול פי שניים מ- $\boldsymbol{y}$״, מקבלים: $5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 5\cdot 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} = 11\boldsymbol{y}$.

ייתכן שתלמידים ירצו לכתוב $5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 52\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} = 53\boldsymbol{y}$, אך זה לא נכון. יש להדגיש את החובה לכתוב סימן כפל כאשר מציבים ביטוי במקום משתנה שיש לפניו/משמאלו מקדם.
הסעיפים ג׳-ד׳ קשים יותר מכיוון שלא מופיעות הצעות פתרון. התשובות הן:
לסעיף ג׳:

- אם $\boldsymbol{y}$ גדול מ- $\boldsymbol{x}$ פי שלושה: $5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 5\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{x} = 8\boldsymbol{x}$.
- אם מספר המטבעות של 1 ₪ גדול ב- 1 ממספר המטבעות של 5 ₪:

$5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} + 1 = 6\boldsymbol{x} + 1$.

לסעיף ד׳:

- אם $\boldsymbol{y}$ גדול מ- $\boldsymbol{x}$ פי חמישה: $5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{y}$.

- אם לחנה יש בסך הכול חמישה מטבעות (כלומר $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 5$ או $\boldsymbol{x} = 5 - \boldsymbol{y}$):
$5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 5(5 - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y} = 25 - 4\boldsymbol{y}$. יש להקפיד על כתיבת הסוגריים!
- אם לחנה יש בסך הכול 20 מטבעות, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 20$, כלומר $\boldsymbol{x} = 20 - \boldsymbol{y}$:
$5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 5(20 - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y} = 100 - 4\boldsymbol{y}$.
בסעיף ה' רצוי לכתוב עם התלמידים מערכת משוואות המתאימה לשאלה הנתונה (אף על פי שאין כאן חובה לכתוב בפירוש מערכת משוואות), למשל:

$$\begin{cases} ① \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 20 \\ ② \quad 5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 52 \end{cases}$$

מהשאלה הקודמת עולה כי $\boldsymbol{x} = 20 - \boldsymbol{y}$ וכי $5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 5(20 - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y} = 100 - 4\boldsymbol{y}$.
לכן $100 - 4\boldsymbol{y} = 52$. לפיכך $4\boldsymbol{y} = 48$, כלומר $\boldsymbol{y} = 12$. לפיכך $\boldsymbol{x} = 8$.

לומדים

בשיעור מובאים שלושת השלבים העיקריים של פתרון מערכת משוואות על-ידי הצבת נעלם.

שלב א': מבטאים את אחד הנעלמים באמצעות הנעלם האחר באחת המשוואות.
יש להסתמך על תוצאות פעילות הגילוי בסעיף ד': כאשר רוצים לבטא את y כפונקציה של x במשוואה כגון $5\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = 3$, יש לבודד את הנעלם y במשוואה הנתונה. הערה: במקרה זה אפשר לבודד את y בשתי דרכים:

א) $5\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = 3$
$5\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + 3$
$5\boldsymbol{x} - 3 = \boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{y} = 5\boldsymbol{x} - 3$

ב) $5\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = 3$
$-\boldsymbol{y} = 3 - 5\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{y} = -3 + 5\boldsymbol{x}$

אך בדרך כלל התלמידים אינם מבינים בעצמם, כי הביטוי הנגדי של $5\boldsymbol{y} - 3$ הוא $-3 + 5\boldsymbol{y}$. לכן מומלץ להשתמש בדרך א'.

שלב ב': במקום אחד הנעלמים מציבים ביטוי השקול לו **במשוואה האחרת**.
המכשול העיקרי הוא השימוש בסוגריים כאשר הנעלם $\boldsymbol{y}$ הוא בצורה $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$.
על המורה לחזור על נקודה זו לאורך כל השיעור, אם יש צורך בכך.

שלב ג': את ערך הנעלם שמצאנו מציבים באחת המשוואות כדי למצוא את ערך הנעלם האחר.
כאמור בשיעור ה', יש לוודא שהתלמידים מציבים את הערך של הנעלם שהם מצאו, במשוואה שמופיעים בה שני הנעלמים. בדרך כלל הדרך הנוחה יותר למצוא את הנעלם החסר היא להשתמש בביטוי שהתקבל בסוף שלב א'. (כאן באמצעות המשוואה $\boldsymbol{y} = 5\boldsymbol{x} - 3$ אפשר למצוא את $\boldsymbol{y}$ בנוחות כאשר ידוע ערך הנעלם $\boldsymbol{x}$.)
הערה: בספר לתלמיד מצוין כי שיטת הצבת הנעלם מתאימה בעיקר כאשר המקדם של אחד הנעלמים הוא 1 או 1-. בהזדמנות זו אפשר לעיין בעמוד "מיומנויות" העוסק בבחירת שיטה לפתרון מערכת משוואות, ולענות על השאלה: באילו מקרים מומלץ להשתמש בכל אחת מהשיטות שנלמדו בפרק?

מתרגלים

בתרגילים 85 ו- 92 יש לפתור את מערכת המשוואות בשיטת הצבת הנעלם.

87. שי טעה בהצבה. כדי למנוע שגיאות מסוג זה, כדאי לכתוב את הביטוי המוצב בסוגריים. ההצבה צריכה להיות כך: $2x-(x-1) = 6 \leftarrow 2x-x+1 = 6 \leftarrow x = 5$ ולכן $y = 4$.

88. המשוואה לחישוב היקף המשולש: $2x+y = 11$. המשוואה להיקף הטרפז: $2x+3y = 17 \leftarrow$ $x = 4$, $y = 3$. AB=4 ס"מ, BC=3 ס"מ.

89. נסמן את גילה של לאה ב- x ואת גילה של שרית ב- y. נקבל שתי משוואות: $x = 4y$ ו- $x+10 = 3(y+10)$ $\leftarrow x = 80$, $Y = 20$. לאה היום בת 80 ושרית בת 20.

בתרגילים 90 - 91 יש לבטא את אחד הנעלמים בעזרת הנעלם האחר. בדרך-כלל, כדאי לבטא את הנעלם שהמקדם שלו הוא 1.

93. נסמן את אחד המספרים ב- x ואת האחר ב- y. נקבל שתי משוואות: $x+y = 64$ ו- $x-y = 18$. המקדמים של הנעלמים הם 1, ולכן אין עדיפות איזה נעלם לבודד באיזו משוואה.
נקבל $y = 23$, $x = 41$. המספרים הם 41 ו- 23.

.94 נסמן את אחד המספרים ב- x ואת האחר ב- y. נקבל שתי משוואות: $x+y = 2$ ו- $x-y = 6$. המקדמים של הנעלמים הם 1, ולכן אין עדיפות איזה נעלם לבודד באיזו משוואה. נקבל $y = -4$, $x = 4$. המספרים הם 4 ו- 2-.

בתרגילים 95 - 96 יש לשים לב לכתוב בסוגריים את הביטוי שמציבים, ולפתוח את הסוגריים לפי חוק הפילוג.

.95 ו) אין פתרון. מקבלים $-1 = 0$.

.97 ו) יש אין-סוף פתרונות. לאחר ההצבה מקבלים $-15x+21+15x = 21 \leftarrow 0x = 0$.

.98 ה) אין פתרון. לאחר הצבה מקבלים $8-9y = 6-9y \leftarrow 2 = 0$.

בתרגילים 102 - 105 שיטת הצבת הנעלם נוחה יותר, כיוון שהמקדם של אחד הנעלמים הוא 1.

.102 נסמן את המחיר של 1 ק״ג תפוחי–אדמה ב- x, ואת המחיר של 1 ק״ג עגבניות נסמן ב- y. נקבל שתי משוואות:
$x+3y = 17$ ו- $2x+2y = 18 \leftarrow y = 4$, $x = 5$. מחיר 1 ק״ג תפוחי אדמה הוא 5 ₪, מחיר 1 ק״ג עגבניות הוא 4 ₪.

.103 יש לשים לב ליחידות. אפשר לפתור הכול בס״מ או הכול במטרים. נסמן את גובהו של גבי ב- x ואת גובהו של אילן ב- y. נקבל שתי משוואות: $x-y = 12$ ו- $\frac{x+y}{2} = 178 \leftarrow y = 172$, $x = 184$. גובהו של גבי הוא 1.84 מ׳, גובהו של אלון הוא 1.72 מ׳.

.104 נסמן את אורך המלבן ב- x ואת רוחבו ב- y. נקבל שתי משוואות: $2x+2y = 24$ ו- $x-y = 2 \leftarrow x = 7$, $y = 5$. אורך המלבן הוא 7 ס״מ ורוחבו הוא 5 ס״מ.

.105 נסמן את זמנו של האצן הראשון ב- x ואת זמנו של כל אחד משלושת האצנים האחרים ב- y. נקבל שתי משוואות: $X = y+1$ ו- $x+3y = 43 \leftarrow y = 10.5$, $x = 11.5$. זמנו של האצן הראשון 11.5 שניות.

.106 א) אפשר לבודד את $2x$ במשוואה הראשונה ולהציב במשוואה השנייה. $2x = 8-3y \leftarrow 8-3y+6y = 2 \leftarrow y = -2$. נציב זאת במשוואה $2x = 8-3y$ ונקבל $x = 7$. $y = -2$, $x = 7$. ב) אפשר לבודד את $4x$ במשוואה הראשונה, ונקבל $4x = 4y-24$, כעת אפשר לחלק ב- 4, נקבל $x = y-6$. נציב ביטוי זה במשוואה השנייה, ונקבל $-10y = 5(y-6)+15$. לפיכך $y = 1$, $x = -5$. ג) אפשר לבודד את $2y$ במשוואה השנייה, ונקבל $2y = 2x+2$. אפשר לחלק ב- 2, ונקבל $y = x+1$. נציב זאת במשוואה הראשונה, ונקבל $9x-2-8(x+1) = 0$. הפתרון המתקבל: $y = 11$, $x = 10$.

מיומנויות, עמ׳ 198

בשני עמודים אלה לומדים כיצד בוחרים את השיטה לפתרון מערכת משוואות נתונה. המסקנות:

- כאשר בשתי המשוואות המקדמים של אחד הנעלמים זהים או נגדיים, מומלץ לפתור את המערכת הנתונה על-ידי חיסור או חיבור של שתי המשוואות;
- כאשר באחת המשוואות הנתונות המקדם של אחד הנעלמים שווה ל- 1 או ל- 1-, מומלץ להשתמש בשיטה של הצבת הנעלם;
- בכל המקרים האחרים מומלץ להשתמש בשיטה של השוואת המקדמים.

מוכנים להמשיך? עמ׳ 201

.1 ג. **.2** ב. **.3** א. **.4** א. **.5** ג. **.6** ב. **.7** א. **.8** ג. **.9** ב.

107. א) משוואה 1 מתאימה למאזניים השמאליים, ומשוואה 2 מתאימה לימניים. ב) מספר הקוביות השחורות שונה בכף השמאלית של שני המאזניים. בכף הימנית המשקל שונה. הכף הימנית במאזניים השמאליים כבדה ב- 100 גרם מהכף הימנית במאזניים הימניים. ג) משקל 5 קוביות שחורות הוא 100 גרם. זה ההפרש בין כפות המאזניים. ה) משקל קובייה שחורה הוא 20 גרם. משקל קובייה לבנה הוא 10 גרם. משקל 5 קוביות שחורת הוא 100 גרם. לכן משקלה של כל קובייה הוא 20 גרם. אפשר להציב בכל אחת משתי המשוואות שבסעיף א' $y=20$, ונקבל $x=10$, כאשר y מייצג את משקל הקובייה השחורה ו- x מייצג את משקל הקובייה הלבנה.

108. א) השוואה בין מקדמים. ב) הצבת הנעלם. ג) שתי השיטות נוחות. אפשר להציב את $2y$. ד) הצבת הנעלם. ה) השוואה בין מקדמים. ו) שתי השיטות נוחות אפשר להציב את $8y$.

109. המשוואה הראשונה זהה בכל הסעיפים, לפיכך הייצוג הגרפי שלה הוא הישר המופיע בכל הסרטוטים. נותר לבדוק רק את המשוואה השנייה. בסעיף ב' המשוואה השנייה היא כפולה של המשוואה הראשונה ב- 2, לכן מדובר בישרים מתלכדים, כלומר C. בסעיף ג' האגף השמאלי של המשוואה השנייה הוא כפולה של האגף השמאלי של המשוואה הראשונה ב- 2. האגף הימיני שונה, לכן מדובר בישרים מקבילים, כלומר A. בסעיף א' מדובר בישרים נחתכים,B.

110. ה) אין פתרון. אפשר לחסר את המשוואות, אפשר להציב את x או את $9y$. נקבל $0 = 4$. ו) אפשר לבודד את y במשוואה הראשונה. $9x+y = 0 \leftarrow y = 9x$. נציב זאת במשוואה השנייה. הפתרון המתקבל הוא $y=0$, $x=0$.

111. ו) אפשר לכפול את המשוואה הראשונה ב- 10 ואת המשוואה השנייה ב- 100 כדי שכל המקדמים יהיו מספרים שלמים. $12x=10y-20$ ו- $-30x+25y-50=0$. יש אין-סוף פתרונות.

112. א) נסמן את אורך החלק הראשון של הדרך, המישור, ב-x ואת אורך החלק השני, העלייה, ב-y. מאחר שהמהירות בקמ"ש, צריך לכתוב את כל הזמנים בשעות. 30 דקות הן 0.5 של שעה. 15 דקות הן 0.25 של שעה. המשוואות המתקבלות: $\frac{x}{40}+\frac{y}{30}=2\frac{1}{2}$ ו- $\frac{x}{30}+\frac{y}{24}=3\frac{1}{4}$.

פתרון המשוואות: $y = 30$, $x = 60$. אורך המסלול במישור הוא 60 ק"מ, ובעלייה - 30 ק"מ.
ב) לדוגמה, אפשר לשנות את זמנו של המתחרה האחרון ל- 3.5 שעות.

113. על-פי משפט פיתגורס במשולש ABC, נקבל $28+y^2 = x^2$. על-פי משפט פיתגורס במשולש ACD נקבל $x^2+y^2 = 100$. נציב את x^2 מהמשוואה הראשונה במשוואה השנייה, ונקבל $y^2 = 36$, כלומר $y = 6$. נציב באחת המשוואות ונקבל $x = 8$. AC = 8 ס"מ, BC = 6 ס"מ.

114. נסמן את מחיר החלב ב- x ואת מחיר הלחם ב- y. החלב נמכר אתמול בהנחה של 20%, הרי שמחירו היה 80% ממחירו הרגיל, וכן לגבי מחיר הלחם היום. המשוואות המתקבלות: $\frac{80x}{100}+y=19$ ו- $x+\frac{80y}{100}=17$.

פתרון המשוואות: $y = 15$, $x = 5$. מחיר החלב הוא 5 ₪, מחיר הלחם הוא 15 ₪.

115. א) לפי משפט פיתגורס נחשב את AD, גובה בניין א', במשולש ADB. $AD^2+3^2 = 5^2 \leftarrow AD=4$ מ'. באופן דומה נחשב את BC, גובה בניין ב', במשולש CBD. נקבל CB=7.2 מ'. המשולש ADB דומה למשולש EFB (זווית ישרה וזווית משותפת), לכן $\frac{x}{3}=\frac{h}{4}$. באופן דומה המשולש CBD דומה למשולש EFD, ולכן $\frac{h}{7.2}=\frac{3-x}{3}$. ב) נבודד את h מאחת המשוואות ונציב במשוואה השנייה. נקבל $h = 2.67$, $x = 2$.

116. לפי הנתונים המחירים שווים. נסמן ב- x את המחיר של 1 ק"ג קישואים, וב- y את המחיר של 1 ק"ג גזר. המשוואה המתקבלת: $3x+2y=2x+3y$. לפי תכונות השוויון נקבל $x-y = 0$, כלומר $x = y$.

117. נסמן ב- x את מספר המשאיות שיש להן 2 סרנים, וב- y את מספר המשאיות שיש להן 3 סרנים. המשוואות המתקבלות: $x+y = 20$ ו- $2x+3y = 48 \leftarrow y = 8$, $x = 12$. מספר המשאיות שיש להן 2 סרנים הוא 12, ומספר המשאיות שיש להן 3 סרנים הוא 8.

118. נסמן את מספר החצאיות ב- x ואת מספר השמלות ב- y. המשוואות המתקבלות: $x = 3y$ ו- $x+y = 16$ ← $y = 4$, $x = 12$ מספר החצאיות הוא 12, ומספר השמלות הוא 4.

119. נסמן ב-x את מספר המטבעות של 2 ₪ וב- y את מספר המטבעות של 10 ₪. המשוואות המתקבלות: $x+y = 14$ ו- $y = \frac{3x}{4}$ ← $y = 8$, $x = 6$. בארנק היו 6 מטבעות של 2 ₪ ו- 8 מטבעות של 8 ₪.

120. נסמן את מספר קבוצות הכדורסל ב- x, ואת מספר קבוצות הכדורגל ב- y. המשוואות המתקבלות: $5x+11y = 64$, $\frac{5x}{11y} = \frac{5}{11}$. נקבל $x = y$. מספר קבוצות הכדורסל שווה למספר קבוצות הכדורגל, 4 קבוצות מכל סוג.

העמקה, עמ' 209

1. אחת האפשרויות לפתרון היא הוצאת גורם משותף במשוואה הראשונה. נקבל $x(x-y)=12$. נציב $x-y = 4$ במשוואה השנייה, ונקבל $4x=12$ ← $x=3$. לכן $y=-1$.

2. נוסיף למשוואה הראשונה xy ואת הנגדי לו $-xy$. סכום מספר והנגדי לו הוא 0 ולכן השוויון נשמר. נקבל $x^2-xy-y^2+xy=12$. נוציא גורם משותף מכל שני איברים, נקבל: $x(x-y)+y(-y+x)=12$. נוציא שוב גורם משותף $(x-y)$, נקבל $(x-y)(x+y)=12$. נציב $x-y=1$ במשוואה השנייה ונקבל $x+y=12$. כעת נפתור, ונקבל $y=5.5$, $x=6.5$.

3. א) קרן טועה. כאשר לפחות אחד המספרים הוא שלילי, הסכום קטן מההפרש. הפתרון הוא , $x=8$ $y=13$. ב) דפנה צודקת. חזקה שנייה של מספר היא תמיד חיובית, ללא קשר לסימנו של המספר. לכן x^2 ו- y^2 חיוביים. הסכום צריך להיות גדול מההפרש, לכן אין פתרון למערכת המשוואות. בסעיף א' הסכום וההפרש תלויים בשני המספרים, והם יכולים להיות שליליים.