יא. גאומטריה דדוקטיבית

רקע

מפרק זה והלאה נבנה עם התלמידים את הגישה המדעית להוכחות בגאומטריה, כלומר את הגאומטריה הדדוקטיבית שהסקת מסקנות בה נעשית על-ידי חוקי היגיון, והן מבוססות על הגדרות פורמליות של מושגים, על אקסיומות ועל משפטים הנובעים זה מזה. בגאמטריה דדוקטיבית אין מקום למדידות, ואין משתמשים בקיפולים ככלי ההוכחה. השימוש בסרטוט הוא להמחשה בלבד ואינו מהווה שום הוכחה. לפיכך הסרטוט לעתים קרובות מופיע בצורת סקיצה, והוא אינו מדויק, כי הוא משמש כלי עזר להבנת דרכי פתרון שאלות. בניית התאוריה מתחילה מהסכמות לגבי **המושגים הראשוניים** שאין מגדירים אותם, אלא מקבלים אותם כ"קיימים ללא הגדרה". לכל מושג השונה מהמושגים הראשוניים ניתנת הגדרה המבוססת על הגדרות קודמות. ברור אפוא שאין מגדירים את המושגים הראשוניים, כי אין מושגים קודמים שאפשר לבסס עליהם את המושגים הראשוניים. לאחר שהוסכם מי הם המושגים הראשוניים, מנסחים את **האקסיומות**. אקסיומה היא היגד, שאיננו מוכיחים אותו אלא מקבלים אותו כנכון ללא שום הוכחה. (אין מדובר כאן במשפטים שאינם מוכיחים אותם בגלל רמת התלמידים בבית הספר.) חלק מהאקסיומות מתארות תכונות של המושגים הראשוניים. הדרישה העיקרית למערכת האקסיומות היא חוסר סתירות בין האקסיומות. מהאקסיומות נובעות מסקנות שאפשר להוכיחן בעזרת האקסיומות שנוסחו. המסקנות האלה נקראות **משפטים**. דרכי ההוכחה יכולות להיות מגוונות, אך בהוכחה משתמשים תמיד בעובדות שכבר הוכחו או באקסיומות שכבר נוסחו. בהוכחה של משפט לא צריכות להיות סתירות פנימיות, אלא אם כן ההוכחה נעשית בדרך השלילה. כמו-כן חשוב לשים לב לכך שההוכחה לא תתבצע בדרך "מעגלית".

<u>לדוגמה</u>, תלמידים רבים סבורים כי כדי להוכיח ש**אם שתי זוויות במשולש שוות, אז המשולש הוא שווה-שוקיים**, אפשר להישען על העובדה שבמשולש שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות. לכן ההוכחה שלהם נראית כך: במשולש שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות, לכן אם שתי זוויות במשולש שוות אז המשולש הוא שווה-שוקים. כמובן, זוהי אינה הוכחה.

בהוכחה משתמשים בחוקי היגיון שאיננו מנסחים אותם לתלמידים בגלל מורכבותם, אך הם יראו את השימוש בהם בתוך כדי הוכחות שונות.

<u>לתשומת לבכם</u>, בניית כל תאוריה, שהיא לאו דווקא גאומטריה בדרך דדוקטיבית, אינה דבר פשוט. לכן הרבה תלמידים מתקשים בהבנה בגאומטריה וכן בפתרון שאלות. אין בגאומטריה שום דבר שמובן מאליו לכולם. חשוב אפוא להקדיש זמן לשאלות שאינן ברורות, בעיקר בתחילת הלימוד של הפרק, כדי למנוע את הקשיים הצפויים בהמשך.

<u>בהוראת הנושא</u> יכול להתעורר קושי בין ידע קודם, דרכי ההוראה וההרגלים של מורה, הנובעים מהתכנית הישנה, לבין מערכת האקסיומות החדשה ודרך הוראתן, שפותחה על-ידי ועדת התכנית של משרד החינוך. שתי המערכות האקסיומתיות שקולות אף-על-פי שהן שונות זו מזו. השינוי העיקרי בא לידי ביטוי <u>באקסיומת המלבן</u> השקולה לאקסיומת המקבילים שכולנו מַכירים היטב. שתי המערכות של האקסיומות מובילות לאותה גאומטריה אוקלידית. נוסף על אקסיומת המלבן שונתה גם ההגדרה של ישרים מקבילים (ישרים המאונכים לאותו ישר הם ישרים מקבילים), שהתלמידים הִכירו בכיתה ז'. לעתים ההגדרה החדשה נוחה יותר מזו המקובלת, כי היא אופרטיבית לעומת ההגדרה המוכרת.

אמנם התלמידים מתחילים להכיר הוכחות פורמליות של משפטים, ובאפשרותנו לדרוש מהם לחזור על דרך ההוכחה, אך אין דורשים את זה מכל תלמידי הכיתה. עדיין יהיו תלמידים שייתקלו בקושי כאשר יצטרכו להוכיח משפטים מסוימים. חשוב אפוא שכל התלמידים ידעו לנסח את המשפטים הנלמדים וידעו להשתמש בהם בפתרון שאלות מתאימות.

מומלץ להקדיש לפרק זה כ- 7 שעות לימוד.

מושגים ומונחים

מושג, מושג ראשוני, הגדרה, מושג מוגדר, אקסיומה, הנחת יסוד, אקסיומת הישר, אקסיומת המלבן, אקסיומת העתקות, משפט, מסקנה, הוכחה, חוקי היגיון, נימוקים לוגיים, סתירה, רק, אם... אז, שייך, לפחות, לכל היותר, נקודה, ישר, מישור, קטע, קרן, מלבן, צלעות נגדיות, זווית ישרה, אלכסון, העתקה איזומטרית, סיבוב, שיקוף, הזזה, חפיפה, צורות חופפות, משפטי החפיפה, סרטוט, נתונים, שאלה, משולש, משולש ישר-זווית, ניצב, יתר, משולש שווה-שוקיים, שוק, בסיס, גובה, תיכון, חוצה-זווית, זוויות הבסיס, זווית הראש, משולש שווה-צלעות, זווית חדה, מידת זווית, אנך אמצעי לקטע, תרשים.

<u>הערה</u>: כמובן, לא כללנו את כל המושגים והמונחים שהתלמידים ייתקלו בהם בפרק זה. את רוב המושגים התלמידים מַכירים היטב מלימודים קודמים, לכן אין צורך בהזכרתם ברשימה שלעיל. דוגמה למושגים כאלה: צלעות שוות, זוויות שוות, מרובע, מצולע ועוד.

מטרות

התלמידים ידעו:

א. לנסח את אקסיומת הישר, את אקסיומת המלבן ואת אקסיומת ההעתקות;
ב. לציין את המושגים הראשוניים ולזהות אותם כמושגים שאין להם הגדרה;
ג. להגדיר את המושגים הלא-ראשוניים שנלמדו בהגדרה פורמלית;
ד. להבחין בין משפט לבין אקסיומה;
ה. לנסח את המשפטים שנלמדו;
ו. לזהות ולכתוב את הנתונים במשפט ובשאלה;
ז. לזהות ולכתוב את מה שצריך להוכיח;
ח. ללוות את ההוכחה בסרטט סקיצה או בסרטוט מדויק לפי הצורך;
ט. לתרגם טקסט מילולי לשפה סימבולית;
י. להוכיח את המשפטים לפי יכולתם;
יא. להשתמש במשפטים לפתרון שאלות בגאומטריה;
יב. להבין את הקשרים בין משפטים לבין אקסיומות וגם בין משפטים לבין עצמם (מה נובע ממה).

ציוד

סרגל, משולש סרטוט, מחוגה, מד-זווית, נספחים לפרק, עיפרון, מחק, כלי הדגמה למורה (סרגל, משולש סרטוט, מחוגה), מחשבון.

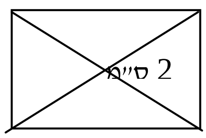
מגלים ולומדים, עמ' 87

א. <u>סרטוטים ונימוקים</u>, עמ' 87

מטרת שיעור זה היא כפולה:

- להראות לתלמידים כיצד מייצגים נתונים על-ידי סרטוט במשימה בגיאומטריה, או להפך, כיצד יש לקרוא סרטוט נתון ולהוציא ממנו את המידע הרלוונטי.
- להראות שסרטוט הוא כלי עזר בלבד ואינו מהווה הוכחה בפני עצמו.

באופן כללי מייצגים נתונים בסרטוט על-ידי סימון מוסכם. לעתים ציון של נתון מסוים עשוי לגרום לסרבול ולאי-הבנה. הדבר יכול לקרות, למשל, כאשר לא ברור לאיזה קטע שייך אורך נתון בסרטוט. לדוגמה, בסרטוט הזה לא ברור אם הנתון "2 ס"מ" מצביע על חצי האלכסון או על האלכסון כולו. במקרים אלה אין מציינים את הנתון בסרטוט.



הסבו את תשומת לבם של התלמידים לכך שגם אם הסרטוט הוא בצורת סקיצה, הוא צריך לתאר את המקרה הכללי ביותר ולא מקרה פרטי, אלא אם כן צוין אחרת. למשל: אם נתונה מקבילית, אין מציירים מלבן, מעוין או ריבוע. אם מדובר במשולש, ולא נתון שהוא משולש מיוחד, מסרטטים משולש סתמי שהוא אינו שווה-שוקיים, אינו שווה-צלעות ואינו ישר-זווית.

<u>מגלים</u>

2-1) מטרת הפעילויות היא להראות כיצד סרטוט יכול להטעות ולהוביל למסקנות לא נכונות. בפעילות 1 המשולש נראה ישר-זווית אך הוא אינו ישר-זווית: ריבוע היתר PK הוא 49 ואילו הסכום של ריבועי הצלעות OP ו- OK הוא 50; בפעילות 2 שני הישרים המסורטטים נראים מקבילים אך הם אינם מקבילים.

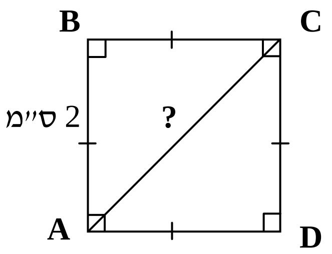
3) הנתונים: $\Delta \mathbf{IML}$, $\mathbf{LI = LM}$, $\mathbf{LK}$ – חוצה-זווית. צריך למצוא: $\angle IKL$. אפשר לכתוב את הנתונים גם אחרת. הנתון: $\mathbf{LK}$ – חוצה-זווית שקול ל- $\angle ILK = \angle MLK$ ואפשר להחליף אותם זה בזה. כמו כן אפשר לכתוב כך: $\Delta \mathbf{IML}$ – שווה-שוקיים, $\mathbf{MI}$ – בסיס המשולש. כלומר בכתיבת הנתונים אפשרית גמישות מסוימת. דוגמה לשאלה מילולית: "במשולש שווה-שוקיים הועבר חוצה-זווית מזווית הראש של המשולש. מהי מידת הזווית שנוצרה בין חוצה-הזווית לבין בסיס המשולש?" גם ניסוח השאלה יכול להיות שונה. לדוגמה, אפשר להשתמש באותיות בניסוח.

לומדים

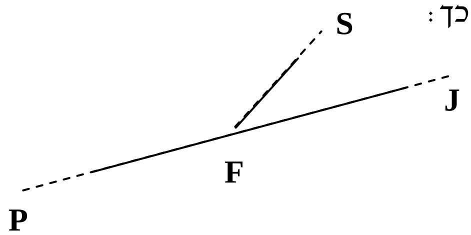
בחלק זה של השיעור מובאת דוגמה לתרגום של הוראה לרשימת נתונים ולסרטוט מתאים.
כתיבת הנתונים כמו בדוגמה "מסדרת" לעתים את החשיבה, בעיקר אם הנתונים מורכבים.
חשוב להדגיש בפני התלמידים שאם מבצעים סרטוט, הוא חייב להתאים לנתונים. לא בכל שאלה נדרש סרטוט, ולא כל תלמיד זקוק לסרטוט. אך רוב השאלות בגאומטריה מלוות בסרטוט, אחרת קשה או בלתי-אפשרי להתמודד עם הבעיות. לסיכום, על התלמידים ללמוד להצביע על הנתונים שבמשימה נתונה או במשפט נתון, ללמוד להתאים סרטוט סקיצה או סרטוט מדויק (לפי הצורך) לנתוני הבעיה, לדעת לקרוא סרטוט נתון לפי סימונים מוסכמים ולפי הנתונים הכתובים ליד הסרטוט, ולהבחין בין הנתונים לבין השאלה הנשאלת. לתשומת לבכם, אמנם בשיעור ישנה דוגמה לכתיבת נתונים בצורה סימבולית, אך דרישה זו אינה מופיעה בתכנית הלימודים. לפיכך אין דורשים מהתלמידים כתיבה פורמלית, אלא מסבירים ומראים את הדרכים האפשריות המיועדות להקל את הבנת השאלות ואת פתרונן.

מתרגלים

5. בפעילות זו מנתחים התלמידים את הנתונים שבשאלה ומתאימים להם סרטוט.
הנתונים: **ABCD** – ריבוע, 2 ס"מ = **AB**.
אפשר לכתוב את השאלה כך:
צריך למצוא מהו אורכו של האלכסון **AC**.



9. בכל סרטוט יש יותר מארבע זוויות, לכן התשובות יכולות להיות שונות. א) אחת הדוגמאות היא ארבע זוויות בין הישרים. יש גם זוויות שטוחות; ב) לתלמידים המתקשים למצוא זווית רביעית אפשר להציע "להסתיר" את אחת הקרניים וכך לראות זווית נוספת. לדוגמה, אם מסתירים את הקרן **FN**, נראה את הזווית **PFS**. הסרטוט יראה בערך כך:

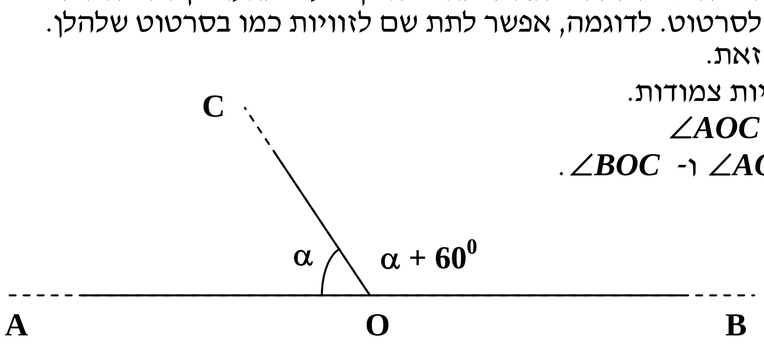


10. הישרים מתלכדים (כדאי שתלמידים עם קושי בתפיסת מרחב ימשיכו את הישרים בעזרת סרגל כדי לראות את זה בעין), לכן יש להם אין-סוף נקודות משותפות.

12. א'.

15. א) השוק משותפת בהכרח; ב) לא חייב להיות קדקוד משותף; ג) זוויות לדוגמה: $\angle$**CBD**, $\angle$**CAE**, $\angle$**KAE**.

16. דונו עם התלמידים בניסוח השאלה. דוגמה לשאלה: "אחת משתי זוויות צמודות גדולה מהזווית השנייה ב- 60^0. מצאו את מידות הזוויות." כעת בקשו מהתלמידים לכתוב את הנתונים. סביר להניח שהם יתקשו בהעברת הנתונים לכתיבה סימבולית. הראו להם שאין טעם להעתיק את המילים מהשאלה, אלא יש להוסיף אותיות לסרטוט. לדוגמה, אפשר לתת שם לזוויות כמו בסרטוט שלהלן. כעת קל לכתוב את הנתונים. נדגים זאת.
נתונים: $\angle AOC$ ו- $\angle BOC$ - זוויות צמודות.
$\angle AOC$ > $\angle BOC$ ב- 60^0. $\angle AOC = \alpha$
צריך למצוא את מידת הזוויות $\angle AOC$ ו- $\angle BOC$.

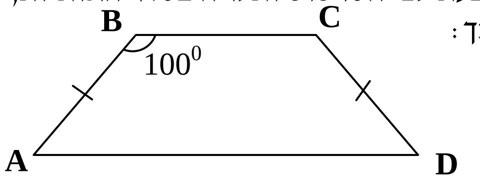


17. משימת יישום. יש ארבע זוויות שקדקודן הוא הנקודה **O**.

18. תרגיל זה עוסק בהבנה ובכתיבה של נתוני הבעיה ובסרטוט שיכול להתאים לנתונים אלו. מומלץ לדון עם התלמידים בעניין כדי למנוע שגיאות בהמשך. בשלב זה **אין** פותרים את השאלות שבתרגיל, אך עדיף להשאיר ליד הסרטוט והנתונים מקום לפתרון השאלה בהמשך. רצוי לבצע תחילה סרטוט, לתת שמות לצורות לפי הצורך, ורק אחר-כך לכתוב את הנתונים בצורה סימבולית, ולא - כתיבת הנתונים תהיה חסרת משמעות, כי זו תהיה העתקה של מילים מהשאלה.
להלן הבהרות והמלצות לכל סעיף.

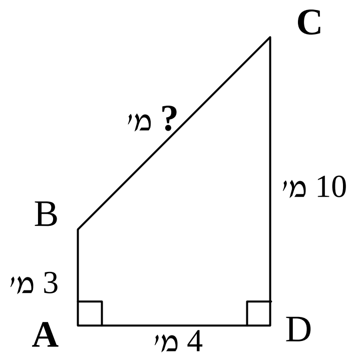
א) בקשו מהתלמידים לסרטט תחילה מעוין, לסמן את צלעותיו השוות בסימון מקובל ולקבוע את שמו, לדוגמה **ABCD**, כך שהאלכסון הקצר יהיה **AC**. יש לסרטט רק את האלכסון הקצר. סרטוט של שני האלכסונים של המעוין עשוי להפריע לפתרון. לפי הסרטוט, ייכתבו נתונים:
ABCD – מעוין, **AB** = 3 ס״מ, $\angle B = 60°$. צריך למצוא את **AC**.

ב) כמו בסעיף א, תחילה מסרטטים. כתיבת הנתונים מבוצעת לפי הסרטוט ותלויה בסדר האותיות, אם **AD** ו- **BC** הם בסיסי הטרפז, הנתונים יירשמו כך:
ABCD – טרפז, **AB** = **CD**, $\angle B = 100°$.
צריך למצוא את מידת הזוויות: $\angle A$, $\angle C$, $\angle D$.

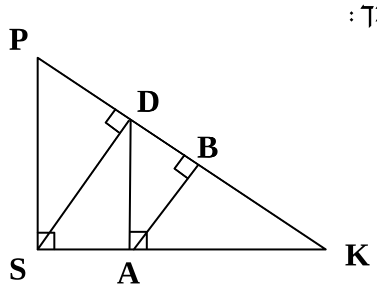


ג) מסרטטים סרטוט של זוויות צמודות, מסרטטים את חוצי-הזווית, נותנים שמות לכל זווית ולחוצי-הזווית ורק אחר-כך כותבים את הנתונים.

ד) כאן נדרש תרגום של הבעיה מחיי היום-יום לשפה מתמטית.
הדבר נעשה בתוך כדי סרטוט. לאחר מכן כותבים את הנתונים לפי הסרטוט.
הסרטוט יכול להיראות כך:



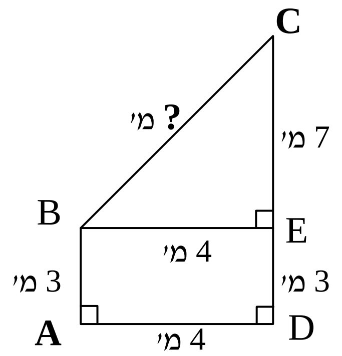
ה) בעזרת תרגילים כמו בסעיף זה לומדים התלמידים לקרוא את השאלות בגאומטריה ולתרגם אותן לשפת סרטוט. מיומנות זו חשובה מאוד להצלחה בלימודי המקצוע.
הסרטוט יכול להיראות כך:



19. כעת מבקשים מהתלמידים לפתור את השאלות שבתרגיל 13. אין צורך בכתיבת הנתונים מחדש וגם אין צורך בסרטוט מחדש. א) המשולש **ABC** שווה-שוקיים, ומידת זווית הראש **B** היא 60^0. כלומר Δ**ABC** שווה-צלעות, כי מידת כל זווית היא 60^0. אמנם התלמידים עדיין לא הוכיחו את המשפט שאם במשולש שתי זוויות שוות, המשולש הוא שווה-שוקיים, אך אפשר להגיד להם שתכונה זו קיימת, ולהשתמש בה לפתרון השאלה. לפיכך האורך של האלכסון הקצר הוא 3 ס״מ. ב) אם התלמידים אינם זוכרים את התכונות של טרפז, הזכירו להם כי בטרפז סכום הזוויות הסמוכות ב״צדדי הטרפז״ הוא 180^0, ובטרפז שווה-שוקיים הזוויות ליד כל בסיס שוות. לפיכך התשובה: 100^0, 80^0 ו- 80^0. ג) בעיה זו כבר נפתרה בכיתה ז׳, וכאן חוזרים על הפתרון שאינו מהווה קושי לתלמידים. סכום חצאי זוויות צמודות שווה לחצי מ- 180^0, שזהו הסכום של זוויות צמודות.

ד) הפתרון לפי הסרטוט שכאן.
נעביר קטע המאונך ל- **CD** מהנקודה **B**. מאחר שלתלמידים עדיין אין מספיק כלים כדי לנמק כל צעד, נסתפק בפתרון השאלה בדרך פורמלית פחות.

ΔBEC – ישר-זווית, BC – היתר. לפי משפט פיתגורס
$4^2+7^2=BC^2$. לפיכך, $BC=\sqrt{65}$, $\mathbf{BC} \approx 8.06$ מ׳.



הערה: עיגול המספר נעשה לפי כללי העיגול, כלומר כלפי מטה, אך כאשר פותרים שאלות מחיי היום-יום, יש להתייחס לעובדה שהמידה האמיתית גדולה יותר מהתשובה. ובכן, ברור כי אם ניקח את הסולם הקטן יותר מהנדרש, לא נגיע לחלון מהמקום שהמכונית נמצאת בו כעת (לפי תנאי השאלה). אילו הייתה השאלה "מה צריך להיות אורך הסולם?", היינו צריכים להתעלם מכללי העיגול ולכתוב כתשובה לפחות 8.07 מ׳.

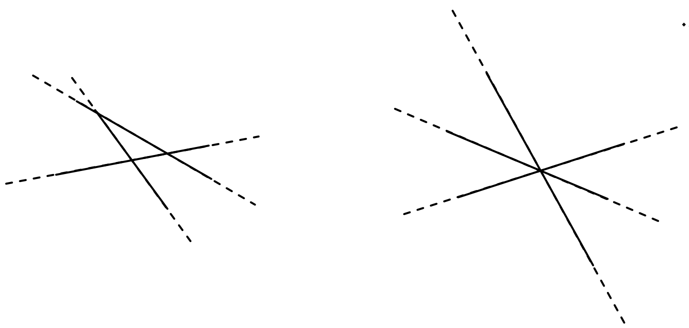
ה) לפי הסרטוט שלעיל, דוגמה למשולשים דומים: $\Delta\mathbf{PSK} \sim \Delta\mathbf{ABK}$ לפי משפט דמיון המשולשים הראשון, כי יש להם שתי זוויות שוות, אחת היא זווית ישרה והשנייה היא זווית משותפת **K**. יש גם זוגות נוספים של משולשים דומים.

20. $\angle\mathbf{AOC}$, $\angle\mathbf{AOB}$, $\angle\mathbf{AOD}$, $\angle\mathbf{BOC}$, $\angle\mathbf{BOD}$, $\angle\mathbf{DOC}$ הן הזוויות. אפשר לכתוב את שמותיהן בצורות שונות; ב) הזוויות הגדולה ביותר היא זווית שטוחה $\angle\mathbf{AOC}$.

21. ב׳ ו- ד׳.

22. ג) 3.

23. ג) יש שתי אפשרויות.



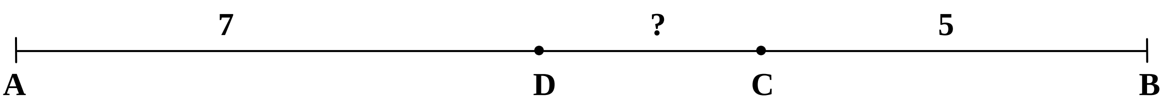
24. בסרטוט יש שלושה קטעים. אפשר לתת לכל קטע שני שמות שונים, לדוגמה **AB** ו- **BA**.

25. כל ישר הוא אין-סופי, לכן אין משמעות לשאלה הנשאלת. אין משווים בין האורכים של הישרים.

26. א) 6; ב) 10; ג) 8; ד) 10.

27. אפשר להיעזר בסרטוט. את אורך הקטע **BO** מוצאים על-ידי פעולת חיסור. א) 1.8 ס״מ. שימו לב לתחום המספרים; ב) שימו לב ליחידות האורך. 2 מ׳ הם 200 ס״מ, לכן התשובה היא 198 ס״מ.

29. אפשר להיעזר בסרטוט ולסמן עליו את האורכים הנתונים. התשובה: 3 ס״מ.



ב. <u>מושגים ראשונים, הגדרות ואקסיומות</u>, עמ׳ 96

<u>מגלים</u>
פעילויות הגילוי המובאות בחלק זה מיועדות להראות את החשיבות של מונחים ושל מושגים שמשתמשים בהם בנימוקים ובהוכחות.

<u>משימות</u>:
1) במשימה זו התלמידים מתבקשים להגדיר את המושג *גיטרה*, הידוע לכולם. מטרת המשימה היא להראות את הקושי בניסוח הגדרה מילולית מדויקת שתפקידה הוא לאפשר זיהוי מושג באופן חד-חד ערכי.
2) בתרגיל זה, הבנוי כשיחה בין שתי אחיות, יראו התלמידים שתמיד יש מקום לשאלות "מדוע"

ו"למה", המובילות לבירור מושגים ולהנמקות של טענות. כדוגמה הובא המושג *זווית*, שהוא אינו מושג ראשוני, והגדרתו מבוססת על המושג הקודם *קרן*, והמושג *קרן* מבוסס על המושגים הקודמים *נקודה* ו*ישר*, שהם מושגים ראשוניים, ולכן אינם מוגדרים כלל. אפשר להגיד כי המושגים הראשוניים הם מוסכמות מקובלות לבניית גאומטריה דדוקטיבית. בכל תאוריה יש מושגים כאלה.

3) פעילות זו מכינה את התלמידים לחלק השני של השיעור שבעמוד *99*. מטרת המשימה היא לתת דוגמה פשוטה של הוכחה פורמלית של תכונה על-סמך תכונה אחרת. שאלה מתבקשת היא: "האם לדעתכם אפשר להוכיח שהקטע הוא הקו הקצר ביותר המחבר בין שתי נקודות?" אף-על-פי שתכונה זו אינטואיטיבית מאוד, אי-אפשר להוכיח אותה: היא אקסיומה שעליה ייבנו תכונות אחרות.

לומדים

התלמידים מכירים את המושגים **נקודה**, **ישר**, **מישור** מכיתה ז'. בשיעור זה המושגים האלה מקבלים משמעות כמושגים ראשוניים.

כמו-כן מוסברים מונחים וביטויים המופעים בניסוח הגדרות ותכונות, וכן הקשר בין הגדרה לבן איור בעזרת דוגמת הגיטרה.

מתרגלים

38. משימת יישום. בתרגיל זה על התלמידים לזהות את המושגים הקודמים למושג "מרובע". בכל מושג שאינו ראשוני אפשר להגיע למושגים ראשוניים על-ידי שרשרת הגדרות של המושגים הקודמים.
ג) דוגמה לשרשרת מושגים קודמים: צלע, קו שבור סגור, קטע, נקודה, ישר.

39. משימה הפוכה לקודמת. הפעם נתונים מושגים, ועל התלמידים לזהות מהם המושגים הקודמים למושג *מלבן*. המושגים הקודמים הם *מרובע* ו*זווית ישרה*. המושגים שאינם נדרשים כלל למושג *מלבן* הם *מחומש* ו*זוויות צמודות*.

40. התרגיל דומה לשני התרגילים קודמים אך כעת נתונים מושגים ועל התלמידים להחליט מהו המושג שאפשר להדירו על-ידי מושגים אלו. לדוגמה, המושג *אמצע קטע* מתאים לדרישה.

41. במהלך הלימודים ייתקלו התלמידים בביטויים חדשים כמו "רק", "לפחות", וכו'. על התלמידים להבין את המשמעות המדויקת של המונחים האלה, ולכן מוצע לתלמידים להתמודד עם המשימה הזו.

לומדים

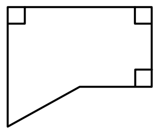
בקטע שיעור זה נחשפים התלמידים למושגים *אקסיומות* ו*משפטים*. ההבדל ביניהם דומה להבדל שבין מושגים ראשוניים ומושגים שאינם ראשוניים: כפי שקיימים מושגים בסיסיים שאין מגדירים אותם ומושגים שמגדירים אותם בהסתמך על מושגים אחרים, כך קיימות תכונות בסיסיות שאין מוכיחים אותן (אקסיומות) ותכונות שמוכיחים בהסתמך על תכונות אחרות (משפטים).

מתרגלים, עמ' *99*

43. בתרגיל זה רואים כיצד בעזרת אקסיומה אפשר לענות על השאלה "כמה ישרים אפשר להעביר דרך שלוש נקודות שלא נמצאות על אותו ישר?" דרך כל שתי נקודות עובר ישר אחד בלבד, לכן דרך שלוש נקודות אפשר להעביר שלושה ישרים בסך הכול.

44. נסביר מדוע לשני ישרים שונים לא יכולות להיות שתי נקודות משותפות, וכמובן, יותר משתי נקודות משותפות. דרך שתי נקודות עובר ישר אחד, לכן לו היו שתי נקודות משותפות לשני ישרים, הישרים היו מתלכדים. לפיכך מספר הנקודות המשותפות של שני ישרים שונים יכול להיות קטן מ-2, כלומר 0 או 1.

58. בתרגיל זה התלמידים מתבקשים לסרטט לפי הדרישות. הסרטוט צריך להתאים למונחים שהתלמידים מתקשים בהם לעיתים קרובות, כגון: *לפחות*, *לכל היותר*, *שייך*, *אינו שייך*. ב) משולש או מרובע – אלה הם שני סוגי מצולעים מתאימים לדרישה. ד) להלן דוגמה למחומש שיש בו רק שלוש זוויות ישרות.



ג. אקסיומות ומשפטים, עמ' 103

מגלים

מטרת פעילויות הגילוי היא להבהיר את האקסיומות שגאומטריה דדוקטיבית בנויה עליהן, כפי שמצויין בתכנית הלימודים החדשה. יש לשים לב כי שינוי באקסיומות לגיטימי לגמרי, מפני שהוא אינו משפיע על מהות הגאומטריה האוקלידית, אלא על דרכי הוכחות, על תכונות (המשפטים) ועל הגדרות של מושגים מסוימים.

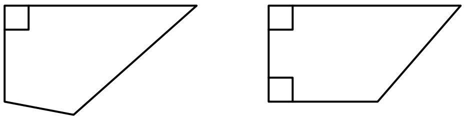
משימות:
1) בתרגיל זה התלמידים יראו את נכונות אקסיומת הישר. אי-אפשר להעביר יותר מישר אחד דרך שתי נקודות שונות. כל הישרים מתלכדים. אם התלמידים טוענים אחרת, יש להבהיר להם כי עובי של חוד העיפרון או סטייה בסרטוט אינם משפיעים על-כך שדרך שתי נקודות עובר ישר אחד ויחיד.
2) על ישר יש אין-סוף נקודות. אמנם אין מנסחים את האקסיומה, אך העובדה היא שיש אין-סוף נקודות על ישר.
3) אם במרובע יש שלוש זוויות ישרות, אז גם הזווית הרביעית היא ישרה. עובדה זו היא חלק של אקסיומת המלבן. אין מוכיחים אותה, אלא בודקים שהדבר קיים.
4) גם עובדה זו היא חלק של אקסיומת המלבן, אף-על-פי שאפשר להוכיחה. אין איסור לנסח אקסיומות, כך שחלקן היו יכולות להיות משפטים. ההוכחה של העובדה מורכבת למדי, ולכן הוחלט להתייחס אליה כאל אקסיומה ולא כאל משפט.

לומדים

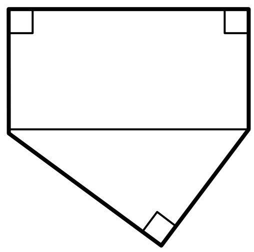
בחלק זה של השיעור יכירו התלמידים אקסיומות שיצטרכו להשתמש בהן להוכחות רבות. ישנן שלוש אקסיומות שנוסחו בתכנית הלימודים: אקסיומת הישר, אקסיומת ההעתקות ואקסיומת המלבן. עודדו את התלמידים ללמוד את האקסיומות בעל-פה. כדי להבין את אקסיומת ההעתקות מזכירים לתלמידים טרנספורמציות איזומטריות כמו שיקוף, סיבוב והזזה, שהם מַכירים מכיתות היסוד. חשוב להדגיש כי התכונה העיקרית של ההעתקות האיזומטריות היא שימור מרחקים בין הנקודות, ולכן הצורות שמתקבלות בהעתקה איזומטרית חופפות. אם התלמידים מתקשים בהבנת המושגים האלה, די יהיה להם לזכור כי בכל טרנספורמציה (העתקה) איזומטרית או בצירוף של כמה מהן מתקבלת צורה החופפת לצורה נתונה. זוהי אקסיומה חשובה מאוד, והיא הבסיס לקיום משפטי החפיפה, שהם המפתח לפיתוח תאוריות בהמשך ולפתרון בעיות רבות. אין מנסחים את כל האקסיומות הקיימות אלא רק שלוש. דוגמה לאקסיומה נוספת היא אקסיומת הקצאת קטע. יש עוד אקסיומות אך אין צורך בניסוחן.

מתרגלים

63. אפשר להעביר מכל קדקוד המשולש תיכון אחד בלבד, כי התיכון הוא קטע, וקטע הוא חלק של ישר.
64. אין-סוף פעמים.
65. אורך של קו שבור גדול מאורך הקטע המחבר את קצותיו של הקו השבור.
66. אם מצמידים משולשים לאורך היתר, כך שמידת הזווית במשולש אחד היא 30^0 ובמשולש האחר היא 60^0, מתקבל מלבן לפי אקסיומת ההעתקות כי זוויות המרובע יהיו של 90^0 כל אחת.
68. במשולשים חופפים צלעות מתאימות הן שוות, וזוויות מתאימות הן שוות לפי ההגדרה.
69. משה פעל בצורה בעזרת ההעתקות האיזומטריות בלבד. בהעתקות אלה נשמרים המרחקים, לכן מידות הצורות יהיו זהות, וצורה ב׳ המוקטנת שבתרגיל אינה יכולה להתקבל.
70. קטע אחד לפי אקסיומת הקצאת קטע.
71. אחד השימושים של אקסיומת הישר באלגברה הוא בניית גרף של פונקציה קווית. התלמידים תמיד שואלים כמה נקודות צריך לסמן כדי לבנות גרף. כעת הם יוכלו גם לנמק כי די בשתי נקודות כדי לבנות גרף של פונקציה קווית, כי הגרף הוא ישר, ולפי אקסיומת הישר, בין שתי נקודות עובר ישר אחד ויחיד. אם כך, מדוע מסמנים בפועל גם נקודה שלישית? הנקודה השלישית משמשת נקודת ביקורת כדי למנוע טעויות בסימון נקודות ובחישוב שיעוריהן. ג) אם הנקודה שייכת לגרף של פונקציה, שיעוריה הופכים את המשוואה המגדירה את הפונקציה, לשוויון מתקיים. גם ההפך נכון: אם שיעורי נקודה הופכים את המשוואה המגדירה את הפונקציה, לשוויון מתקיים, הנקודה שייכת לגרף של הפונקציה.
72. קטע אחד, כי קטע הוא חלק של ישר.
73. כל הנקודות של המרובע יזוזו 4 משבצות שמאלה ו- 5 משבצות למטה. המרובע החדש שיתקבל יהיה חופף למרובע נתון לפי אקסיומת ההעתקות. כדי לסרטט את המרובע החדש באופן נכון, די לסמן את קדקודי המרובע החדש ולחבר אותם בקטעים, כי כל שני קצוות מגדירים קטע חד-משמעי, לפי אקסיומת הישר.
74. א) מצולעים א׳ ו- ג׳ חופפים לפי אקסיומת ההעתקות, שמשתמשים בה פעמיים. ב) אחרי הפעם ה-20 יתקבל מעוין החופף למעוין נתון, לפי אקסיומת העתקות. ג) אם התלמידים עושים העתקות באופן נכון, אין זה משנה מה הם עושים, כי הם משתמשים רק בהעתקות איזומטריות שנשמרים בהן המרחקים בין הנקודות. לפי אקסיומת ההעתקות, בתום הפעילות תתקבל צורה החופפת לצורה הנתונה, ומידותיה יהיו בדיוק כמו המידות של הצורה המקורית.
75. למרובע יכולות להיות זווית ישרה אחת בלבד, שתי זוויות ישרות בלבד. או ארבע זוויות ישרות. לא יכולה להיות אפשרות של מצולע עם 3 זוויות ישרות בלבד, כי לפי אקסיומת המלבן אם במרובע יש שלוש זוויות ישרות אז גם הזווית הרביעית ישרה.



76. דוגמה למחומש בעל שלוש זוויות ישרות. לדוגמה, את המשולש הזה אפשר לחלק למלבן ולמשולש ישר-זווית.



77. יתקבל מצולע החופף למצולע הנתון לפי אקסיומת ההעתקות, ויהיה אפשר לחלק אותו לאותן צורות שהוא מורכב מהן. המצולע החדש מורכב מאותן הצורות של המצולע המקורי.

78. אין מדובר כאן בהוכחה מדויקת. המטרה היא שהתלמידים יחשבו על העניין ואף ינסו לשכנע את הזולת במחשבתם. ההוכחה המדויקת מובאת אחר כך בחלק "לומדים".

ד. <u>משפטים והוכחות</u>, עמ' 109

<u>מגלים</u>

בפעילויות הגילוי מוזכרות התכונות של צורות חופפות. בחפיפה נשמרים המרחקים בין הנקודות, לכן לצורות חופפות יש אותן מידות. כאשר מעתיקים צורה נתונה על-ידי אחת מההעתקות (טרנספורמציות) האיזומטריות או צירופיהן, מתקבלת צורה החופפת לצורה נתונה. עובדה זו נקבעת באקסיומת ההעתקות. לאחר שנקבעו אקסיומות, יש להוכיח כל טענה שאינה אקסיומה. הטענות שמוכיחים אותן, נקראות משפטים. המשפט הראשון שמוכח כאן הוא משפט חפיפת המשולשים הראשון - צלע-צלע-צלע, ופעילויות הגילוי הן ההכנה להוכחת המשפט. על-סמך משפט זה נוכל להוכיח בהמשך חלק מהתכונות של משולש שווה-שוקיים.

<u>משימות</u>:

1) א) זוויות בעלות מידה שווה הן זוויות חופפות. גם ההפך הוא נכון: לזוויות חופפות יש מידה שווה. לפיכך בין זוויות שהוצגו בשאלה אין זוויות חופפות; ב) הזווית שתתקבל כתוצאה מסיבוב והזזה תהיה חופפת לזווית הנתונה; ג) כן, הזוויות יהיו חופפות, לכן הן יוכלו לכסות זו את זו בדיוק לפי הגדרת צורות חופפות.

2 - 3) חזרה על ההבחנה בין הנתונים לבין השאלה. אי-אפשר להתחיל לכתוב הוכחות אם הבחנה זו אינה ברורה.

<u>לומדים</u>

בחלק הראשון של השיעור מגדירים חד-משמעית את דרכי העבודה בגאומטריה דדוקטיבית. מרגע זה לא נשתמש בסרטוט, בקיפול או במדידה ככלי לגיטימי להנמקה. ההנמקה שהיא ההוכחה תבוסס על נימוקים לוגיים (למשל, נימוקים בצורה "אם... אז..."), על הגדרות פורמליות של המושגים, על המושגים הראשוניים, על אקסיומות ועל המשפטים הקודמים שכבר הוכחו. סרטוט שיכול להיות בצורת סקיצה הוא **כלי עזר בלבד** שממחישים בעזרתו את הבעיה, ולעתים מפתחים את דרך ההוכחה ואת פתרון השאלות, וזה התפקיד היחיד שלו מעכשיו.

בחלק השני הוכחת משפט החפיפה הראשון כתובה באופן פורמלי, לפי תנאי ההוכחה המוגדרים בתחילת השיעור. אין דורשים את ההוכחות מכל תלמידי הכיתה, אלא לפי יכולת של התלמידים. מה שחשוב הוא שהתלמידים ידעו לנסח את המשפטים ולהשתמש בהם בפתרון שאלות שונות.

שימו לב כי ההוכחה היא מורכבת, משום שיש בה די הרבה מרכיבים שיש לזכור והתלמידים עדיין אינם בשלים לבצע את כל שלבי ההוכחה כראוי. כמו-כן קיים פחד מסוים מפני ההוכחות. הפחד הזה הוא פסיכולוגי יותר מאשר קושי אמיתי של התלמידים. אחת הדרכים להתגבר על הפחד הזה הוא לתרגל שאלות הוכחה כמו שאלות גאמטריות אחרות. מומלץ גם להימנע מהשימוש במילה "משפט" לעיתים קרובות, אלא פשוט לפתור תרגילים שמופיע בהם משפט זה ללא הזכרת המונח. על התלמידים להתנסות בהוכחות רבות בעזרת המורה או ללא עזרה כלשהי (תלוי ברמה), שכן רק בדרך זו יוכלו רוב התלמידים להתנסות בהוכחה ללא פחד.

רוב ההוכחות בפרק זה מכילות שני שלבים: בשלב הראשון מוכיחים חפיפת משולשים מסוימים ובשלב השני מוכיחים את שוויון הצלעות או הזוויות המתאימות במשולשים חופפים. לתשומת לבכם, ההוכחות כאן אינן שונות מההוכחות שהיו מקובלות בתכנית הישנה. השינוי יבוא לידי ביטוי בהוכחות של מקבילות ישרים.

<u>מתרגלים</u>

80. מומלץ לבצע את התרגיל בעל-פה. כדי שהתלמידים יוכלו להתגבר על קשיים מהותיים של הוכחה כלשהי, עליהם להבין היטב את המרכיבים של כל משפט ושל כל שאלת הוכחה, כגון: מה הנתונים, מה צריך להוכיח ומהם שלבי ההוכחה. כמו-כן, הסרטוט חשוב, וצריך להקדיש להם זמן. לתשומת לבכם, כאשר התלמידים חוזרים על הוכחה בעל-פה, ההבנה נעשית עמוקה יותר. אפשר לשאול תלמידים שונים שאלות לפי השלבים של ההוכחה, כאשר אחד ממשיך את האחר.

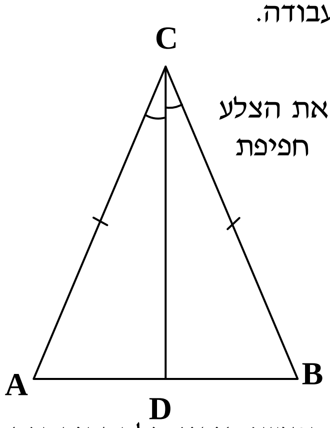
81. בתרגיל זה מבקשים מהתלמידים לחזור על הוכחת משפט החפיפה הראשון, כאשר שמות המשולשים שונים מאלה שבשיעור. מומלץ לבצע תרגיל זה בעל-פה לפי רמת הכיתה. אין צורך בפתרון התרגיל, אם התלמידים הם חלשים מדי, אך לתלמידים מתקדמים הדבר חשוב מאוד.

82. בשני הסעיפים המשולשים חופפים לפי משפט החפיפה הראשון. בכל סעיף על התלמידים לאתר את שתי הצלעות המתאימות בשני המשולשים ואת זוויות ביניהן, ולוודא שהן שוות. בכל סעיף צלע אחת וזווית שוות לפי הסימון, והצלע השנייה היא הצלע המשותפת לשני המשולשים שבחפיפתם "חושדים".

84. אין צורך להמשיך את ההוכחה עד לאקסיומות, כי משפט החפיפה הראשון כבר הוכח והתבססות על המשפטים הקודמים שהוכחו היא אחת מהעקרונות של בניית תאוריה בדרך דדוקטיבית. (אילו היינו צריכים כל פעם לחזור לאקסיומות לא היינו יכולים להתקדם בבניית גאומטריה דדוקטיבית.)

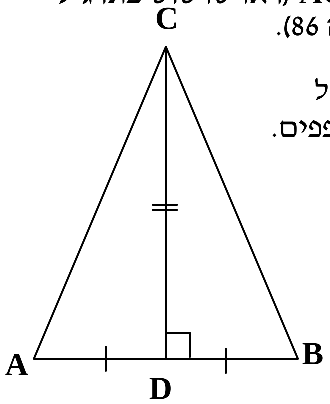
85. משפט זה הוא מסקנה ישירה של משפט החפיפה הראשון, כאשר זווית בין שתי צלעות מתאימות בשני משולשים היא זווית ישרה. הפירוט של שלבים א׳-ג׳ חשוב מאוד בשלב זה, כי התלמידים רק מתחילים את התהליך של הוכחות משפטים, ועליהם לקלוט את סדר העבודה.

86. הדריכו את התלמידים לבצע תחילה סרטוט ולסמן את הנתונים בסרטוט. הנה דוגמה לסרטוט אפשרי.
בסרטוט שלפניכם מסומנים את נתוני המשפט, נוסף על-כך יש לסמן את הצלע המשותפת. שני המשולשים **ACD** ו- **BCD** חופפים לפי משפט חפיפת המשולשים הראשון צלע-זווית-צלע.



87. הסרטוט יהיה כמו בתרגיל הקודם. הדריכו את התלמידים להיזכר במושג *תיכון* ולהסביר את משמעותו. אחר-כך הובילו אותם למסקנה של מה שצריך להוכיח. ההוכחה תהיה פשוטה על-סמך המשפט שהוכח בתרגיל הקודם. מחפיפת המשולשים **ACD** ו- **BCD** נובע כי **AD = DB** (צלעות מתאימות במשולשים חופפים) ולפיכך **AD** הוא תיכון לבסיס המשולש **ACB** (ראו סרטוט בתרגיל הקודם). לפי הצורך אפשר לחזור על הוכחת חפיפת המשולשים (ראו משימה 86).

89. זהו המשפט ההפוך למשפט שהופיע במשימה 87. איננו יודעים שהמשולש הוא משולש שווה-שוקיים, אלא צריך להגיע למסקנה זו על-סמך ההגדרה של משולש שווה-שוקיים ועל-סמך ההוכחה ששני משולשים **ACD** ו- **BCD** חופפים.
לפניכם דוגמה לסרטוט אפשרי. יש להוכיח כי **AC = CB**.



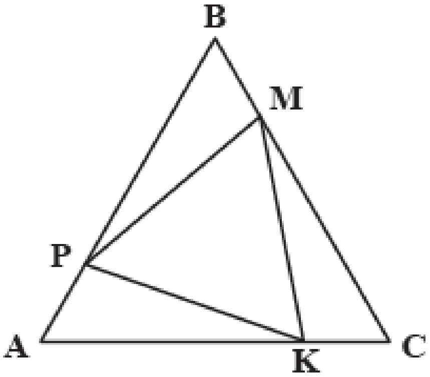
92. גם כאן מסמנים בסרטוט את כל הנתונים, ומוכיחים את חפיפת המשולשים. נובע מכך שוויון זוויות הבסיס שהן זוויות מתאימות במשולשים חופפים.

95. פותרים את השאלה על-סמך המשפט שהוכח במשימה 89. התשובה: 40^0.

97. כמו משימה 87, אך הפעם מוכיחים כי $\angle ADC = \angle BDC = 90°$. הזוויות המתאימות במשולשים חופפים שוות, והן גם צמודות, לכן סכומן הוא 180^0. משוויונן נובע כי מידתה של כל זווית היא 90^0.

98. הקושי העיקרי כאן הוא להבין את הסרטוט, כי המשולשים שצריך להוכיח את חפיפתם מכסים חלקית זה את זה. מומלץ לסרטט את הסרטוט על הלוח ולצבוע בצבעים שונים את הצלעות המתאימות בתוך כדי התבוננות במשולשים האלה.

101. משולש **ABC** הוא שווה-צלעות. לפי תכונות השוויון, אם a = b, אז a–c = b–c.
לכן אפשר לכתוב כך: **AB –AP = BC –BM**, כלומר **PB = MC**. ולפי אותה תכונה **MC = AK**. המשולשים **APK**, **BMP** ו- **CKM** – חופפים (צ-ז-צ).
והצלעות **PK**, **MP** ו- **KM** שוות, כי הן צלעות מתאימות.
לפיכך המשולש **PMK** הוא שווה-צלעות.



104. המשולשים **AOD** ו- **BOC** חופפים לפי משפט חפיפת המשולשים הראשון. לכן **BC = AD**.

ה. <u>משפט חפיפת המשולשים השני ומשפט חפיפת המשולשים השלישי</u>, עמ' 118

<u>מגלים</u>
מטרת פעילויות הגילוי היא להעניק לתלמידים רעיון אינטואיטיבי כיצד מוכיחים את משפט החפיפה השני. התלמידים מכירים את משפטי החפיפה השני והשלישי מכיתה ה'. חשוב להראות לתלמידים על-סמך מה אפשר להוכיח את המשפט הזה.

<u>משימות</u>:
1) המשולשים **ABC** ו- **XYZ** הם משולשים חופפים. אם התלמידים מטילים בכך ספק, אפשר לבנות את המשולשים ולראות שהם חופפים.
2) כן, זה בעצם משפט החפיפה השלישי. אם בציוד הכיתה יש רצועות, אפשר לבנות שני משולשים מרצועות שוות בהתאמה ולוודא שהדבר הוא נכון.
3) א) לא. משולש הוא צורה קשיחה, כלומר את צלעות המשולש אי-אפשר "להזיז" כמו צלעות של מלבן, לדוגמה. זוהי תכונה שמשתמשים בה בבניית גשרים, למשל. התלמידים יכולים לבדוק תכונה זו גם ברצועות, אם ישנן.
ב) כן. מארבע רצועות מתאימות אפשר לבנות מרובע ולהזיז את צלעותיו וכך לקבל מרובע שזוויותיו שונות מאלה שהיו למרובע המקורי. כלומר אפשר לקבל מרובע חדש אפילו על-ידי תזוזה קלה של רצועות.

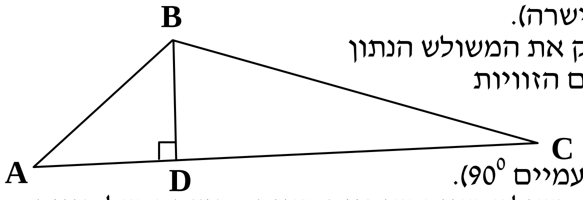
<u>לומדים</u>
בחלק זה מובאים משפטי חפיפת המשולשים השני והשלישי. אין מוכיחים את משפטים כאן (הוכחות המשפטים מופיעות ב"העמקה" בעמוד 147), אך אפשר לבקש מהתלמידים לכתוב את הנתונים ואת מה שצריך להוכיח. נוסף על ניסוח המשפטים מַגיעים למסקנה כי משולש הוא צורה קשיחה (כתוצאה של המשפט השלישי). כלומר אי-אפשר לקבל משולש אחר על-ידי "תזוזה" של צלעות המשולש. שלוש צלעות של משולש מגדירות אותו חד-משמעי. לעומת זאת, מרובע אינו מוגדר על-ידי צלעותיו בלבד. אפשר "להזיז" צלעות של מרובע ולקבל מרובע אחר. קיימות אין-סוף אפשרויות כאלה. העובדה שמשולש הוא צורה קשיחה, שימושית בחיי היום-יום ומשמשת בסיס לחיזוק גשרים, למשל.

<u>מתרגלים</u>
כעת התלמידים מַכירים שלושה משפטי חפיפה. בשאלות עליהם למצוא שלושה מרכיבים מתאימים ולקבוע לפי איזה משפט חפיפה המשולשים חופפים. התלמידים צריכים לוודא שהמרכיבים מתאימים לאחד המשפטים.
106. במשימה זו המשולשים חופפים לפי משפט חפיפת המשולשים הראשון. המרכיב השלישי הוא זוויות קדקודיות שוות.
107. כאמור אפשר להשתמש בכל אחד משלושת משפטי החפיפה. לאחר שהתלמידים משערים מהם

המשולשים החופפים, עליהם למצוא את המרכיבים המתאימים השווים זה לזה ולסמנם. סימון המרכיבים המתאימים השווים בוודאות עוזר בקבלת ההחלטה לגבי משפט החפיפה המתאים. כתיבת שלושת התנאים במחברת מסדרת את החשיבה ומזכירה לתלמידים מה הם עשו במשימה מסוימת. **א)** **BD** – צלע משותפת, המשולשים חופפים לפי משפט החפיפה השלישי (צלע-צלע-צלע). דוגמה לכתיבת נימוקים (אין צורך בכתיבת הנתונים עקב חוסר זמן. הסימון בסרטוט יכול להיחשב כנתונים): **AB = CD**, **AD = CB** (לפי הנתונים), **DB** – צלע משותפת, לכן המשולשים **CDB** ו- **ABD** חופפים לפי משפט חפיפת המשולשים השלישי (או בקיצור צ-צ-צ). דונו עם התלמידים בנתון המיותר להוכחה: זווית ישרה **DBA**. **ב)** $\Delta KCD \cong \Delta AKD$ לפי משפט חפיפת המשולשים השלישי. **ג)** $\Delta SPU \cong \Delta STU$ לפי משפט חפיפת המשולשים הראשון. **ד)** כאן מציאת המרכיבים השווים מורכבת יותר. המרובע **NOBL** הוא מלבן לפי אקסיומת המלבן (שלוש זוויות של מרובע ישרות לפי הנתונים, לכן הרביעית ישרה), ולפי אותה אקסיומה, הצלעות הנגדיות של המרובע הן שוות. לפיכך המשולשים ישרי-הזווית **NOL** ו- **BLO** חופפים, כי ניצביהם שווים בהתאמה (המסקנה ממשפט חפיפת המשולשים הראשון).

108. א) את המשולש ישר-הזווית הנתון נשלים למלבן על-ידי הצמדה של משולש החופף לנתון. לשני המשולשים החופפים יתר משותף, שהוא אלכסון המלבן. במלבן סכום הזוויות שווה ל- 360^0, כי כל הזוויות ישרות. סכום זה מורכב מכל הזוויות של שני משולשים חופפים, לכן סכום הזוויות של משולש ישר-זווית שווה ל- 180^0. אחת הזוויות היא זווית ישרה, לכן סכום שתי הזוויות האחרות שווה ל- 90^0.

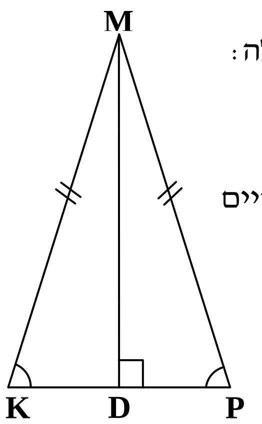
ב) סכום שתי זוויות שאינן ישרות במשולש ישר-זווית הוא 90^0. מידת זווית היא גודל חיובי, לכן במשולש ישר-זווית כל זווית השונה מזווית ישרה, קטנה מ- 90^0, ולכן היא זווית חדה לפי הגדרת זווית חדה (זווית חדה היא זווית הקטנה מזווית ישרה).



109. נעביר גובה לאחת מצלעות המשולש. הגובה מחלק את המשולש הנתון לשני משולשים ישרי-זווית. בכל משולש כזה סכום הזוויות השונות מזווית ישרה שווה ל- 90^0.
סכום של כל ארבע זוויות אלה שווה לסכום הזוויות של המשולש הנתון, והסכום הוא 180^0 (פעמיים 90^0).

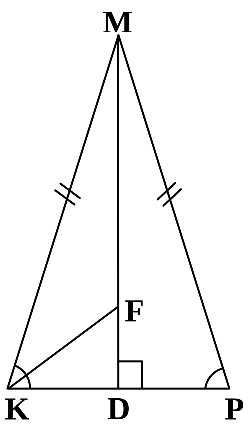
112. סכום זוויות במשולש 180^0, זוויות הבסיס של משולש שווה-שוקיים שוות, מידתה של זווית הראש 36^0. לפיכך מידתה של כל אחת מזוויות הבסיס היא 72^0.

113. כבר הוכחנו כי במשולש שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות (משימה 37).



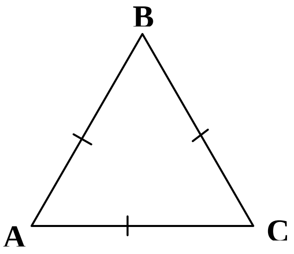
נסמן את הנתונים בסרטוט, ונתבונן במשולשים KDM ו- PDM. במשולשים אלה:
$\angle MDK = \angle MDP = 90°$, כי **MD** הוא גובה לבסיס המשולש, $\angle K = \angle P$ כזוויות בסיס המשולש. לפיכך $\angle KMD = \angle PMD$. MP = KM כשוקיים של משולש שווה-שוקיים. לפיכך $\Delta KMD \cong \Delta PMD$ לפי משפט חפיפת המשולשים הראשון צלע-זווית-צלע. כלומר הגובה לבסיס של משולש שווה-שוקיים מחלק את המשולש לשני משולשים חופפים.

114. זוהי המסקנה הנובעת מהמשפט שהוכח במשימה הקודמת.



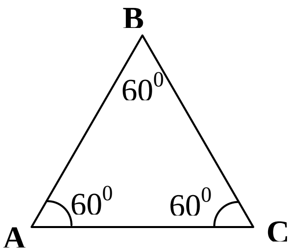
123. ההוכחה כאן מורכבת מכמה שלבים. חשוב שכל התלמידים יתנסו במציאת הפתרון, כי שאלות כאלה נפוצות בגאומטריה. הדריכו את התלמידים להתבונן בסרטוט ולחשוב "אחורנית", כלומר להתחיל לפתור את השאלה מהסוף. לדוגמה, אפשר להגיע לפתרון כך: צריך להוכיח כי $\Delta FKC \cong \Delta HKD$. לשם כך צריך למצוא שלושה מרכיבים מתאימים שווים זה לזה. נתבונן במשולשים האלה. נתון כי **KH = FK**. ידוע שהמשולש **FKH** שווה-שוקיים, לכן אפשר להסיק כי $\angle F = \angle H$ שהן זוויות הבסיס של המשולש שווה-השוקיים **FKH**. חסר המרכיב השלישי במשולשים הנדרשים. מצאנו צלע וזווית השוות בהתאמה לצלע ולזווית במשולש השני. לכן אפשר להוכיח שהמשולשים חופפים לפי משפט חפיפת המשולשים הראשון או לפי משפט חפיפת המשולשים השני. לכן סביר לבדוק אם $\angle FKD$ שווה ל- $\angle HKC$. אם כן, נשתמש במשפט חפיפת המשולשים השני. הבדיקה מראה שבשלב זה אי-אפשר לקבוע את שוויון

הזוויות האלה. לפיכך נתבונן בצלעות של המשולשים שליד הזוויות השוות **F** ו- **H**. אם נוכל לקבוע את שוויון הצלעות האלה, כלומר ש- **FC** שווה ל- **HD**, נוכל לקבוע שהמשולשים חופפים, לפי משפט חפיפת המשולשים הראשון. ואכן, **HD = FD + DC**, ואילו **FC = HC + DC**, לפי הנתונים **HC = FD**, ולכן **FC = HD** כסכום של קטעים שווים. לפיכך המשולשים חופפים לפי משפט חפיפת המשולשים הראשון. קשה לתלמידים להבין את שוויון הצלעות **FC** ו- **HD**, כי לקטעים יש חלק משותף, וצריך להשתמש בחיבור קטעים כדי להוכיח את השוויון.



124. במשולש שווה-צלעות כל הזוויות שוות. סכום הזוויות במשולש הוא 180^0. לפיכך כל אחת מזוויות המשולש שווה-הצלעות הוא 60^0. אפשר לחזור להוכחה שכל הזוויות במשולש שווה-צלעות שוות, אך לא חייבים. נדגים את ההוכחה. המשולש **ABC** שווה-הצלעות שבסרטוט הוא משולש שווה-שוקיים. הבסיס הוא **AC**, ולכן $\angle A = \angle C$ כזוויות הבסיס של משולש שווה-שוקיים.

גם המשולש שווה-הצלעות **ABC** הוא משולש שווה-שוקיים שבסיסו **BC**, ולכן $\angle B = \angle C$ כזוויות הבסיס. לפי כלל העברת השוויון, כל שלוש הזוויות שוות: $\angle A = \angle B = \angle C$.



125. אם במשולש שתי זוויות שוות ל- 60^0, המשולש הוא שווה-שוקיים, והזוויות האלה הן זוויות הבסיס. (משפט זה הוכח כבר, ואת ההוכחה יראו התלמידים גם בחלק "מיומנויות"). לפי המשפט של סכום הזוויות במשולש, גם מידת הזווית השלישית במשולש זה היא 60^0. לכן באותו משולש יש זוג נוסף של זוויות שוות, ולכן המשולש הוא גם משולש שווה-שוקיים בעל בסיס אחר. לפיכך כל צלעות המשולש שוות, כלומר המשולש הוא שווה-צלעות.

126. א) זוויות הבסיס במשולש שווה-שוקיים שוות, לכן מידתה של כל אחת מזוויות הבסיס היא 70^0.
ב) $\angle KFD + \angle FKD = 90°$ לכן $\angle KFD = 90° - 35° = 55°$

127. במשולש **ABD**: $\angle ABD = 180° - (30° + 40°) = 110°$. במשולש **ABC**: $\angle A = \angle C = 30°$ כזוויות בסיס של משולש שווה-שוקיים. לפיכך $\angle ABC = 120°$. לפיכך $\angle B_1 = 10°$.

ו. __תכונות של משולש שווה-שוקיים__, עמ' 128

__מגלים__

מטרת פעילויות הגילוי היא להוביל את התלמידים לרעיונות של הוכחת תכונות של משולש שווה-שוקיים. למעשה, התכונות של משולש שווה-שוקיים הן מסקנה ישירה לכך שלמשולש שווה-שוקיים יש סימטריה שיקופית. (ציר השיקוף עובר דרך חוצה-זווית של זווית הראש, שהוא גם תיכון וגם גובה.) בהרבה הוכחות הקשורות למשולש שווה-שוקיים, מעבירים את הגובה (או תיכון או חוצה-זווית של זווית הראש), מתבוננים במשולשים חופפים, ואחר-כך ממשיכים בהוכחה.

__משימות__:

מומלץ לתת לתלמידים זמן לחשוב, כדי שייחשפו לרעיונות של הוכחות. העניין אינו פשוט, אך חשוב להבין שהתכונות אכן קיימות. אין צורך בהוכחות מדויקות כעת. ההוכחות המלאות מובאות בשיעור ובתרגילים שבהמשך.

__לומדים__

בחלק זה של שיעור מובאים משפטים והוכחתם. כל משפט הוא תכונה של משולש שווה-שוקיים, ומכל המשפטים האלה נובעת תכונה נוספת של משולש שווה-שוקיים: הגובה לבסיס, התיכון לבסיס וחוצה-הזווית של זווית הראש מתלכדים. אך כדי להגיע למסקנה זו יש להוכיח כי גובה לבסיס הוא תיכון לבסיס וחוצה-זווית של זווית הראש; תיכון לבסיס הוא גובה לבסיס וחוצה-זווית של זווית הראש; וגם חוצה-זווית של זווית הראש הוא תיכון לבסיס וגובה לבסיס. משפטים אלה אינם קשים להבנה ובהחלט אפשר לדרוש מרוב תלמידי הכיתה להוכיח אותם. כל תלמידי הכיתה יכולים לזהות את הנתונים ולהגדיר מה צריך להוכיח. להוכחות מפורטות של שלבים אלה, ראו תרגילים 132-134-137)

מתרגלים

141. כל משולש שווה-צלעות הוא משולש שווה-שוקיים, כי יש לו שתי צלעות שוות. אך לא כל משולש שווה-שוקיים הוא משולש שווה-צלעות.

142. כן, במשולש שווה-צלעות.

143. זווית הבסיס במשולש שווה-שוקיים יכולה להיות רק קטנה מ- 90^0, כלומר רק זווית חדה. ההוכחה נעשית על-פי המשפט של סכום הזוויות במשולש.

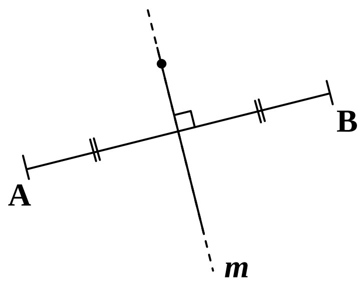
144. זווית הראש יכולה להיות כל זווית קטנה מ- 180^0, וזוויות הבסיס תמיד זוויות חדות.
$\angle FBD = 40°$,$\angle FHB = 125°$,$\angle DFB = 100°$,$\angle DFB = 85°$.

145. הטענות הנכונות: א', ב', ה', ו', ח', י', י"א.

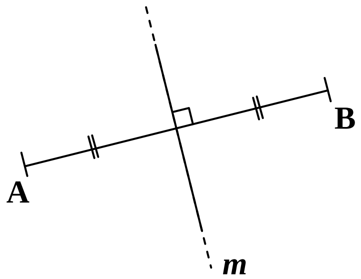
147. תחילה צריך להיזכר במושג *אנך אמצעי לקטע*. ההגדרה מובאת על הלוח שליד המשימה. מההגדרה נובע כי כדי להוכיח שישר הוא אנך אמצעי לקטע, יש להוכיח שמתקיימים שני התנאים בו-זמנית: א) הישר חוצה את הקטע; ב) הישר מאונך לקטע. במשולש שווה-שוקיים גובה לבסיס מאונך לבסיס, לכן תנאי אחד מתקיים. כמו-כן הוכחנו כי במשולש שווה-שוקיים הגובה לבסיס הוא גם תיכון, כלומר חוצה את הבסיס. לפיכך הגובה לבסיס המשולש שווה-השוקיים מונח על הישר שהוא האנך האמצעי לבסיס.

148. הזכירו לתלמידים כי אנך אמצעי לקטע הוא ישר. הנתונים מסומנים כעת בסרטוט א'. בסרטוט ב' נראה את תהליך ההוכחה. (התלמידים יעבדו בסרטוט אחד.)

סרטוט ב'

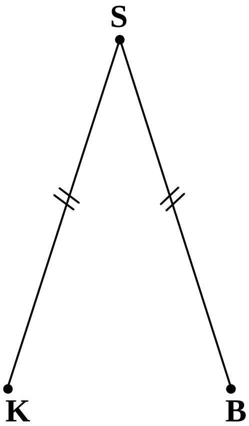


סרטוט א'

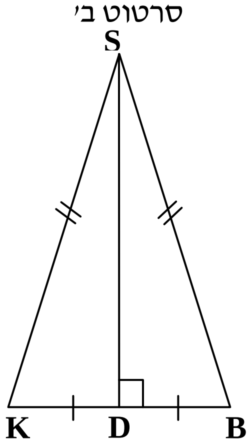


150. מומלץ להתחיל סרטוט כמו בסרטוט א' כדי להמחיש את הנתונים.
לאחר מכן מחברים את הנקודות **K** ו- **B** ומקבלים משולש שווה-שוקיים.
נעביר בו את הגובה **SD** לבסיס. הגובה הוא גם תיכון, כלומר הקטע **SD** מאונך לקטע **KB** ומחלק אותו לשני קטעים שווים. לפיכך הקטע **SD** מונח על האנך האמצעי לקטע **KB**, וכמובן, גם הנקודה **S**.

סרטוט א'



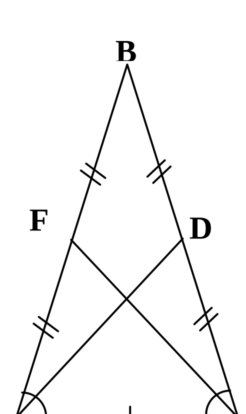
סרטוט ב'



151. א) 48^0; ב) 27^0; ג) 60^0; ד) 62.5^0.

154. תחילה צריך לסמן את אמצע השוק של המשולש. הקטע שמחבר את האמצע ואת הקדקוד שמול צלע זו יהיה תיכון לפי הגדרת התיכון. שני התיכונים שווים כי הם צלעות מתאימות במשולשים חופפים.

155. שני התיכונים שווים כי הם צלעות מתאימות במשולשים חופפים.
$\Delta AFC \cong \Delta CDA$ לפי משפט חפיפת המשולשים הראשון צלע-זווית-צלע.
הקושי העיקרי מתבטא בזה שהמשולשים מכסים זה את זה באופן חלקי, וישנם תלמידים שמתקשים לראות את המרכיבים הנחוצים של המשולשים החופפים.



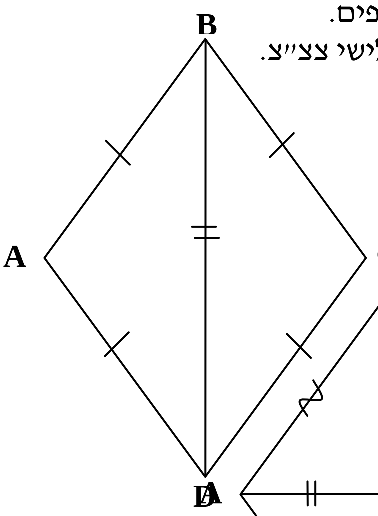
156. שאלה דומה לשאלה קודמת.

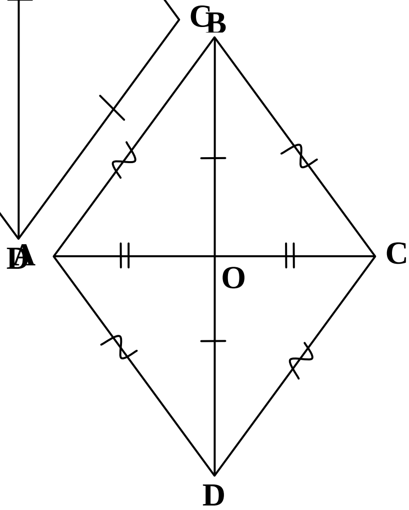
157. אם תכונה זו של משולש מתקיימת, המשולש הוא שווה-שוקיים. חשוב לוודא שהתלמידים לא הולכים ב״מעגל סגור״. כלומר להשתמש במסקנה כדי להוכיח אותה. במקרה זה מתבקשים התלמידים להוכיח כי אם במשולש שתי זוויות שוות, אז הוא שווה-שוקיים. לתלמידים יש נטייה לומר שאם למשולש יש שתי זוויות שוות הוא שווה-שוקיים. נכון לרגע זה טענה זו לא במקומה כי הם טרם הוכיחו את המשפט.

158. מוכיחים פעמיים כי זהו משולש שווה-שוקיים, ובכל פעם לוקחים הבסיס הוא צלע שונה.

159. יש לחקור אפשרויות שונות. אפשרות אחת: נניח שאורך הבסיס של המשולש הוא 14 ס״מ. אם כך אורך שתי השוקיים יהיה 21 ס״מ (במקרה זה המשולש קיים). אורך כל שוק הוא 10.5 ס״מ. אפשרות נוספת: אורך השוק הוא 14 ס״מ. לפיכך שתי השוקיים הן באורך 28 ס״מ, ואורך הבסיס הוא 7 ס״מ. (גם המשולש הזה קיים.) כלומר לשאלה זו יש שני פתרונות.

160. בסרטוט האלכסון **BD** מחלק את המעוין **ABCD** לשני משולשים חופפים.
המשולשים ABD ו- CBD חופפים לפי משפט חפיפת המשולשים השלישי צצ״צ.





161. בסרטוט שלפניכם מסומנים כל הנתונים.
לפי הנתונים המשולשים **ABO** ו- **CBO** חופפים לפי משפט חפיפת המשולשים השלישי צצ״צ.
הזוויות **AOB** ו- **COB** שוות (זוויות מתאימות במשולשים חופפים).
הנקודות **A**, **O**, **C** נמצאות על אותו ישר,
לכן הזוויות **AOB** ו- **COB** הן זוויות צמודות.
לפיכך $\angle AOB = \angle COB = 90°$.
כלומר $AC \perp BD$.

162. מומלץ שהתלמידים יתלבטו בעניין. דונו בדרכים המוצעות. להלן אחת הדרכים היעילות לסרטוט מעוין. מסרטטים שני קטעים שאינם שווים זה לזה, כך שיחצו זה את זה ויהיו מאונכים זה לזה. לאחר מכן מחברים את קצות הקטעים, כך שיתקבל מרובע. המרובע הוא מעוין. אפשר להוכיח זאת, שכן מתקבלים ארבעה משולשים חופפים לפי משפט חפיפת המשולשים הראשון צלע-זווית-צלע. צלעות המרובע הן צלעות מתאימות במשולשים חופפים, ולכן הן שוות (מתקבל מעוין לפי הגדרה).

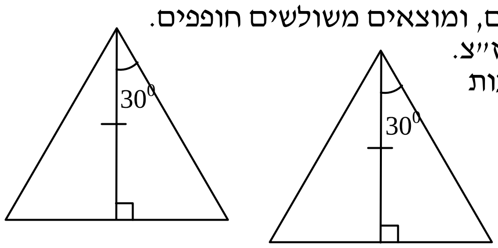
מיומנויות, עמ׳ 136

במיומנויות של פרק זה מראים לתלמידים משפטים שאפשר לקבוע באמצעותם, שמשולש הוא משולש שווה-שוקיים. מיומנות זו של זיהוי משולש שווה-שוקיים חשובה מאוד להמשך הלימודים.

מוכנים להמשיך? עמ׳ 138

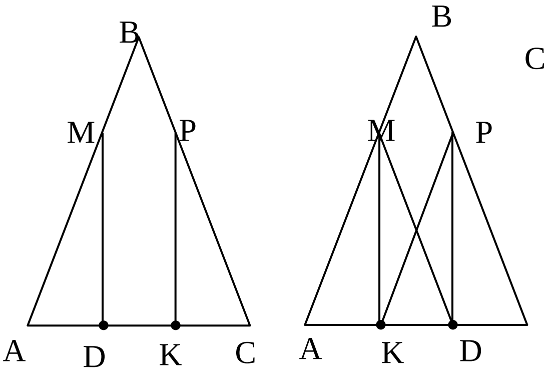
1) המסקנות ב׳, ה׳, ז׳ ו- ח׳ הן נכונות; 2) ב׳; 3) ג׳; 4) א׳; 5) ב׳, ה׳, ח׳.

165. חשוב לבצע סרטוט. מעבירים גבהים במשולשים המסורטטים, ומוצאים משולשים חופפים. המשולשים חופפים לפי משפט חפיפת המשולשים הראשון צז״צ. לפיכך צלעות שני המשולשים שווים, והמשולשים שווי-הצלעות חופפים, לפי משפט חפיפת המשולשים השלישי צצ״צ.



166. אחת הצלעות של משולש שווה-שוקיים גדולה פי שניים מהצלע האחרת. כלומר אם אורך הצלע הקטנה הוא x ס״מ, אורך הצלע הגדולה הוא $2x$ ס״מ. בתנאים אלה השוק אינה יכולה להיות קטנה מהבסיס, כי המשולש לא יתקיים. במשולש זה יש שתי שוקיים באורך $(2x)$ ס״מ ובסיס שאורכו x ס״מ. התשובה: אורך הבסיס 8 ס״מ ואורך כל שוק 16 ס״מ.

168. ישנן שתי אפשרויות לסרטוט. לפי הנתונים בסרטוט א׳, $\Delta AKM \cong \Delta CDP$ לפי משפט חפיפת המשולשים השני זצ״ז. מחפיפת המשולשים נובע ש- $MK = PD$, שהן צלעות מתאימות במשולשים חופפים. המקרה השני מורכב יותר׳ ואפשר לבקש מהתלמידים המתקדמים להוכיחו. בסרטוט ב׳ מוכיחים תחילה ש- $\Delta CKP \cong \Delta ADM$, לפיכך $MD = PK$. לאחר מכן מוכיחים ש- $\Delta DKP \cong \Delta KDM$ לפי משפט חפיפת המשולשים הראשון. לבסוף מסיקים את השוויון הנדרש.

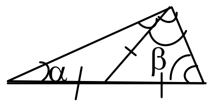


סרטוט ב׳ סרטוט א׳

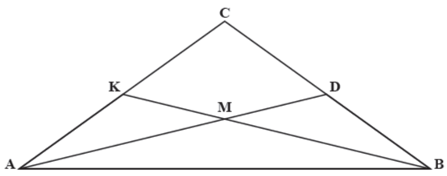
169. קודם כל, היחס בין צלעות המשולש הוא 2:7. מומלץ לשוחח עם התלמידים על כך. צלעות אלה אינן יכולות להיות שתי השוקיים, כי השוקיים במשולש שווה-שוקיים הן שוות, כלומר היחס בין השוקיים הוא 1:1. המסקנה הראשונה: אחת הצלעות היא שוק של המשולש, והאחרת היא בסיסו. ממשיכים לחקור. במשולש שתי שוקיים שוות ובסיס אחד. מי ארוך יותר: השוק או הבסיס? אם השוק קצרה יותר, הבסיס גדול יותר מפעמיים השוק $(2 + 2 < 7)$, אך לא ייתכן משולש כזה,כי התנאי לקיום משולש הוא שסכום כל שתי צלעות המשולש צריך להיות גדול מהצלע השלישי. לפיכך עולה המסקנה השנייה: הבסיס קטן מהשוק. כעת אפשר לפתור את השאלה, לדוגמה, בעזרת משוואה. ההיקף נתון בסנטימטרים, לכן נחלק את ההיקף לחלקים שווים: אורך כל חלק הוא x ס״מ. לפיכך אורך כל שוק הוא $(7x)$ ס״מ, ואורך הבסיס הוא $(2x)$ ס״מ. ידוע כי היקף המשולש שווה ל- 32 ס״מ. המשוואה שמתקבלת היא: $7x + 7x + 2x = 32$, לפיכך $x = 2$. לכן אורך השוק הוא 14 ס״מ, ואורך הבסיס הוא 4 ס״מ.

1. הקושי העיקרי בשאלה מתבטא בכך שהמספרים הם שברים. תשובה: 7.8 ס"מ, 19.5 ס"מ ו- 19.5 ס"מ.

2. לפי נתוני השאלה, התיכון מחלק את המשולש הנתון לשני משולשים שווי-שוקיים.
עודדו את התלמידים לסמן את זוויות הבסיס בכל משולש כזה באותיות α ו- β. זוויות הבסיס של משולש שווה-שוקיים שוות. לכן סכום הזוויות של המשולש הנתון יתבטא כך: $\alpha + \beta + (\alpha + \beta)$. סכום זה שווה ל- 180^0. לפיכך $\alpha + \beta = 90^0$, וזוהי אחת הזוויות של המשולש הנתון. כלומר המשולש הוא ישר-זווית.



3. תחילה מוכיחים כי $\Delta\mathbf{AKB} \cong \Delta\mathbf{BDA}$
לפי משפט חפיפת המשולשים הראשון. מחפיפה זו מסיקים ש- $\angle K = \angle D$. אחר-כך מוכיחים כי $\Delta\mathbf{AKM} \cong \Delta\mathbf{BDM}$ לפי משפט חפיפת המשולשים השני. לפיכך המשולש **AMB** הוא שווה-שוקיים.



5. ההשלמה של הסרטוט מבוססת על אקסיומת הישר:
דרך שתי נקודות עובר ישר אחד ויחיד, ולכן אין צורך בשום מדידה בתוך כדי ביצוע המשימה.