

קומבינטוריקה

קומבינטוריקה היא אחד הענפים המעניינים של מתמטיקה. קומבינטוריקה שייכת לתחום האריתמטיקה והיא עוסקת בתכונות של המספרים הטבעיים. בקומבינטוריקה עוסקים בשיטות ספירה בתחום המספרים הטבעיים ומחפשים נוסחאות למספר אפשרויות של מאורע מסוים תחת אילוצים שונים. לקומבינטוריקה יישומים רבים מחוץ למתמטיקה כגון תעשייה, צבע, מסחר ועוד. לדוגמה, חברה צריכה לבחור 5 מקומות לחלוקת סחורה מתוך 30 מקומות, כך שהמרחקים בין המרכזים והלקוחות יהיו קצרים ככל האפשר. בתיאוריה קיימות 17,100,720 אפשרויות (26 · 27 · 28 · 29 · 30). לקומבינטוריקה יישומים גם בתחומים רבים בתוך המתמטיקה – אלגברה, גיאומטריה, הסתברות, הצפנה, מחשבים ועוד.

בפרק "קומבינטוריקה" יילמדו שלושה נושאים: תמורות; חליפות עם חשיבות לסדר ועם החזרה; וחליפות עם חשיבות לסדר וללא החזרה. האתגר העיקרי של המורה הוא לסייע לתלמידים להבין כל נושא ונושא, להצליח לעזור להם לדמיין את הנושאים ובייחוד להבין את ההבדלים בין המקרים השונים למרות קווי הדמיון החיצוניים שביניהם. בסוף הפרק מופיעות שאלות סיכום שמשלבות תרגילים משלושת הנושאים.

שיעור ראשון: תמורות, עמ' 4

מושג מרכזי: תמורה - מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים בשורה.

המלצה להוראה:

כדאי לתת לתלמידים לפתור את כל התרגילים הראשונים עד תרגיל 4 א' (כולל) באופן עצמאי (בקבוצות או לבד). את תרגיל 4 ב' כדאי לבדוק במליאה: כדאי לשאול את הילדים לאיזו חוקיות הם הגיעו ולרשום את החוקיות על הלוח (ראו תשובות לתרגיל 4 ב'). אחרי הבדיקה, כשכל התלמידים הבינו מה עליהם לעשות, כדאי לתת להם להתקדם לתרגילים הבאים בנושא, כאשר מידי פעם יש לעצור ולשאול אותם איך מה שהם עשו מתקשר לטבלה שבתרגיל 4 א' – איזו שורה בטבלה מייצגת התרגיל.

בין תרגיל 5 ו-6 מופיע שיעור שמסכם את מה שנעשה עד כה - סיכום ומסקנות: מגלים את הנוסחה לסדר n עצמים בשורה: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ ולומדים את מושג העצרת בתרגילים 6 – 7 התלמידים מתרגלים את הנוסחה שלמדו.

מומלץ מאוד לוודא שהתלמידים הבינו היטב את המושג "תמורה". על מנת להבהיר את החשיבות לסדר, כדאי למספר את המקומות של עצמים וכך להדגיש הבדל בין מקום ראשון למקום אחרון.

תשובות והערות לתרגילים:

(1) א) כדי לרשום את כל האפשרויות, כדאי לרשום בשיטתיות. לדוגמה: להשאיר את האות הראשונה קבועה ולרשום את שתי האפשרויות לשתי האותיות הנוספות. אחר-כך לקחת אות אחרת כראשונה קבועה וכו'.

האפשרויות הן: כ א ל, כ ל א, א ל כ, א כ ל, ל כ א, ל א כ.

ב) מספר האפשרויות הוא 6. אפשר לספור את האפשרויות. אפשר גם לחשב. לדוגמה יש 3 אותיות ראשונות, לכל אחת מהן יש שתי אפשרויות שונות לאות השנייה ואפשרות אחת לאות השלישית. $3 \cdot 2 = 6$ סה"כ.

(2) א) כדי לרשום את כל האפשרויות, כדאי לרשום בשיטתיות. לדוגמה: לבחור צבע אחד קבוע, אחריו צבע שני ואז שתי אפשרויות לצבע השלישי והרביעי. אחר-כך להחליף את השני ושוב שתי אפשרויות לשלישי ולרביעי, וכו'. לכל צבע ראשון יש 3 אפשרויות לצבע שני ועוד 2 אפשרויות לצבע שלישי ורביעי.

כ צ ל א, כ צ א ל, כ ל א צ, כ ל צ א, כ א צ ל, כ א ל צ.

באותו אופן להמשיך כאשר הראשון הוא 'צ' וכן כאשר הראשון הוא 'ל' וכאשר הראשון הוא 'א'.

ב) סה"כ יש 24 אפשרויות. 6 אפשרויות לכל צבע שנבחר ראשון.

(3) א) יש 4 אפשרויות למיקום התמונה הראשונה. יש 4 מקומות פנויים.

ב) יש 3 אפשרויות למיקום התמונה השנייה. מאחר ותמונה אחת כבר מוקמה, נשאר למקם רק 3 תמונות.

ג) למיקום התמונה השלישית יש 2 אפשרויות. נשארו רק 2 מקומות פנויים.

ד) למיקום התמונה הרביעית יש רק אפשרות אחת. המקום הפנוי שנשאר לאחר שמוקמו כבר 3 תמונות.

ה) מספר האפשרויות הכולל הוא $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

קומבינטוריקה

(4) א)

מספר עצמים	מספר אפשרויות לסידור העצמים בשורה
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40,320
9	362,880
10	3,628,800
11	39,916,800
12	479,001,600

ב) במעבר משורה לשורה כופלים את הערך שהתקבל בשורה הקודמת במספר השורה החדשה. לדוגמה: דרך 1: כדי למצוא את הערך בשורה מסוימת יש לכפול את מספר השורה בערך שמופיע בשורה הקודמת. למשל, על מנת למצוא מספר בעמודה 11, נכפול 11 (מספר השורה) ב- 3,628,800 (הערך שמופיע בשורה 10).

דרך 2: כדי למצוא את הערך בשורה מסוימת יש לכפול את מספר השורה במספרי כל השורות שקדמו לה. למשל, כדי למצוא את הערך שבשורה 11, נכפול: 11 · 10 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1.

(5) מתרגלים את החוקיות שמצאנו בסעיף הקודם.

א) יש 5,040 אופנים שונים לסידור 7 הטושים.

ב) יש 3,628,800 אופנים שונים להושיב את 10 הילדים על עשרת הכסאות. 120 מספרים שונים.

(6) א) לדוגמה: הקטע מתאר את מספר האפשרויות השונות בהן ניתן לסדר פריטים בשורה. למשל: כאשר יש שתי אבנים, אפשר לסדרן בשני אופנים שונים בשורה. כאשר יש 3 אבנים, ניתן לסדרן בששה אופנים שונים בשורה, וכו'.

ב) שמונה אבנים בונות ארבעים אלף ושלוש מאות ועשרים בתים. (40,320).

(7) א) 2 מילים. ב) מ- 3 אותיות – 6 מילים; מ- 4 אותיות – 24 מילים; מ- 5 אותיות – 120 מילים; מ- 10 אותיות – 3,628,800 מילים. (הבעיה שקולה לסידור n איברים שונים בשורה).

ג) רבי סעדיה גאון מסביר את הרעיון על-פיו מחשבים את מספר התמורות, כלומר את מספר האפשרויות לסידור n פריטים בשורה. יש לכפול את כל המספרים הטבעיים מ-1 ועד n. מ- 11 אותיות אפשר להרכיב 39,916,800 מילים (ראו הסבר לתרגיל 4 ב').

שיעור שני: חליפות עם חשיבות לסדר ועם החזרה, עמ' 6

מושגים מרכזיים:

חליפה – בחירת מספר פריטים מתוך קבוצה.

חליפה עם החזרה – מותר לבחור עצם יותר מפעם אחת.

חליפה ללא החזרה – מותר לבחור עצם רק פעם אחת.

חליפה עם חשיבות לסדר – חשוב איפה ממוקם כל פריט.

חליפה ללא חשיבות לסדר – אין חשיבות למיקום הפריטים.

המלצה להוראה:

את ההסברים בעמ' 6 - 7 כדאי לקרוא ביחד ולוודא שהתלמידים מבינים היטב את המושגים "חליפה", "חשיבות לסדר", "עם החזרה". הדוגמאות בעמ' 7 מדגימות ומסבירות את המושגים. כדאי לוודא שהתלמידים הבינו את הדוגמאות היטב. אחרי שהם הבינו את הדוגמה בעמ' 7, יש לעבור לדוגמה בעמ' 8 ולתת להם לפתור אותה לבד ולאחר מכן לבדוק את הפתרון שהם נתנו. כדאי לתת לתלמידים לפתור את התרגילים 1 – 5 א' לבד, ולבדוק יחד את החוקיות שהתקבלה בסעיף 5 ב'. בתרגילים הבאים יש לתת לתלמידים ליישם את החוקיות שהם מצאו בתרגיל 5 ב'. תרגיל 7 נועד רק לתלמידים חזקים.

בעמ' 12 מופיעה נוסחה כללית לבחירת k עצמים מתוך n עצמים עם חשיבות לסדר ועם החזרה: n^k .

קומבינטוריקה

בדוגמה הושם דגש על המקרה $n > k$. בתרגיל 8 מתרגלים את הנוסחה שנלמדה, התרגילים הם ברמת קושי גבוהה יותר.

מומלץ לוודא שתלמידים הבינו היטב את המושגים "חשיבות לסדר" ו-"עם החזרה". על מנת להקל על הבנת המושגים יש להביא כמה שיותר דוגמאות ממחישות (כמו מספר סודי בבנק וסיסמא במחשב, שבהם מותר לחזור על מספרים וחשוב סדר ההקלדה).

תשובות והערות לתרגילים:

- (1) אפשר להרכיב 9 מילים שונות. אא, אב, אג, בא, בב, בג, גא, גב, גג. אחת השיטות להרכבת המילים היא לקחת אות אחת ולכתוב אותה עם כל אחת מהאותיות האחרות. (לכל אות ראשונה 3 מילים. יש 3 אותיות, לכן יש $3 \cdot 3 = 9$ מילים).
- (2) אפשר להרכיב 16 מילים שונות. אא, אב, אג, אד, בא, בב, בג, בד, גא, גב, גג, גד, דא, דב, דג, דד. כמו בתרגיל 1, כותבים כל אות עם כל אחת מהאותיות האחרות. לכל אות 4 מילים, יש 4 אותיות לכן $4 \cdot 4 = 16$.
- (3) אפשר להרכיב 25 מילים. נניח שהאותיות הן א, ב, ג, ד, ה. אא, אב, אג, אד, אה, בא, בב, בג, בד, בה, גא, גב, גג, גד, גה, דא, דב, דג, דד, דה, הא, הb, הg, הd, הה.
- (4) כיוון שהכדור שהוצא מוחזר לתוך הכד, בכל אחת מההוצאות יש 5 אפשרויות לבחירת צבע הכדור. הוצאת כדור אחד לא משפיעה על ההמשך, משום שבכל פעם מתחילים מאותו מצב (כד ובו 5 כדורים). בסה"כ יש 125 אפשרויות לבחירת הרכב הצבעים. $(5 \cdot 5 \cdot 5 = 125)$.

(5)

מספר האפשרויות לבחור שני עצמים מתוך קבוצה (עם חשיבות לסדר ועם החזרה).	מספר העצמים בקבוצה
4	2
9	3
16	4
25	5
36	6
49	7
64	8
81	9
100	10

- (ב) כל ערך בעמודה השמאלית הוא הערך שבעמודה הימנית (מספר השורה) בחזקת 2.
* ניתן לבקש מתלמידים לבנות עמודות נוספות לבחירת 3 עצמים, 4 עצמים, כדי להכליל ל- n עצמים.
- (6) א) אפשר לכתוב 16 מספרים דו-ספרתיים מ-4 ספרות. ב) מ-10 אותיות אפשר לחבר 100 מילים בנות 2 אותיות. ג) יש 25 אפשרויות שונות.
 - (7) אפשר להרכיב 64 מילים שונות. לדוגמה: אאא, אאב, אאג, אאד, אאא, אגא, אגב, אגג, אגד, אבא, אבב, אבג, אבד, אבא, אבג, אגד, אדד. באופן דומה אפשר לרשום את כל אחת מהאותיות ב', ג', ד' ראשונות. $(16 \cdot 4 = 64)$.
אפשר לבחור בשיטות נוספות לכתובת המילים. לבחירת האות הראשונה יש 4 אפשרויות, לכל אחת מהאפשרויות יש 4 אפשרויות לבחור את האות השניה, ולכל בחירה של אות שנייה יש 4 אפשרויות לבחירת האות השלישית. $(4 \cdot 4 \cdot 4 = 64)$.
 - (8) א) 6,561 אפשרויות. $(9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6,561)$. ב) 32 מספרים. $(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32)$. ג) 59,049 אפשרויות. $(3^{10} = 59,049)$. ד) 16,384 אפשרויות. על הסביבון 4 אותיות. $4^7 = 16,384$.

קומבינטוריקה

שיעור שלישי: חליפות עם חשיבות לסדר וללא החזרה, עמ' 13

מושגים מרכזיים:

חליפה – בחירת מספר פריטים מתוך קבוצה.

חליפה ללא החזרה – מותר לבחור עצם רק פעם אחת.

חליפה עם חשיבות לסדר : חשוב איפה ממוקם כל פריט.

המלצה להוראה:

קוראים את ההגדרה של "חליפה ללא החזרה" בעמ' 13 ומוודאים שהתלמידים מבינים את ההבדל בין "חליפה עם החזרה" ל"חליפה ללא החזרה". כדאי לתת גם דוגמה קטנה שמדגימה את שני סוגי החליפות: עם ובלי החזרה. אחרי שהתלמידים הבינו את ההגדרה, נותנים להם לפתור את התרגילים 1 – 4 א' לבד. את תרגיל 4 ב' בודקים יחד והמורה רושם על הלוח את החוקיות. שאלות 5 – 6 מתרגלות את החוקיות שהתלמידים מצאו בתרגיל 4 ב'.
 בעמ' 15 מופיע שיעור. כדאי לעבור ביחד על הדוגמה, לראות שהתלמידים הבינו את כל השלבים, את התרשימים ואת המסקנה. את הדוגמה בעמ' 16 כדאי שהתלמידים יעשו בעבודה עצמית (לבד או בקבוצות) ואז לעבור ביחד על הפתרון ועל הדמיון והשוני שבין שני התרגילים (בעמ' 15 ו-16). בעמ' 17 מופיע שיעור ונוסחה כללית לבחירת k עצמים מתוך n עצמים עם חשיבות לסדר וללא החזרה:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$
 כדאי לחזור שוב לבחירה עם חשיבות לסדר ועם החזרה ולראות מדוע תנאי זה לא היה הכרחי שם. הנוסחה כולה, ובמיוחד $(n - k + 1)$ לא קלה להבנה, ולכן אין צורך להתעקש על הרישום הפורמלי של האיבר האחרון. חשוב להבין שמחסירים עד מספר אחד קטן מ- k.
 שאלה 7 מתרגלת נוסחה שנלמדה בשיעור.
 כדאי להתעכב ולהדגיש את ההבדלים שבין "חליפה עם החזרה" ל"חליפה ללא החזרה". כדאי לעשות זאת באמצעות דוגמאות (סיסמא בבנק, שבה המספרים יכולים לחזור על עצמם, לעומת כרטיס לוטו, שבו המספרים לא יכולים לחזור על עצמם). בהתחלה כדאי להביא דוגמאות עם מספרים קטנים שתהיינה מוחשיות יותר.

תשובות והערות לתרגילים:

- (1) א) אב, בא, אג, גא, בג, גב. ב) 6 אפשרויות.
- (2) א) אב, בא, אג, גא, אד, דא, בג, גב, בד, דב, גד, דג. ב) 12 אפשרויות.
- (3) א) לבחירת האות הראשונה יש 5 אפשרויות. ב) 4 אפשרויות. ג) 3 אפשרויות. ד) 2 אפשרויות. ה) סה"כ 120 אפשרויות. $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5! = 120)$.
- (4) א)

מספר העצמים בקבוצה	מספר האפשרויות לבחירת שני עצמים מתוך הקבוצה (עם חשיבות לסדר וללא החזרה)
2	2
3	6
4	12
5	20
6	30
7	42
8	56
9	72
10	90

- ב) כל ערך בשורה השמאלית הוא מכפלת הערך בעמודה הימנית בערך הקודם לו. (מכפלת שני מספרים עוקבים, כאשר הערך הגדול מבין השניים הוא הערך הכתוב בעמודה הימנית).
- (5) א) 90 אפשרויות. $(10 \cdot 9 = 90)$. ב) 56 מספרים. $(8 \cdot 7 = 56)$. ג) 42 אפשרויות. $(7 \cdot 6 = 42)$. ד) 210 אפשרויות. $(7 \cdot 6 \cdot 5 = 210)$.
- (7) א) 45,239,040 אפשרויות. $(36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 = 45,239,104)$. ב) 3,042 אפשרויות. $(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6)$.

קומבינטוריקה

ג) 27,216 אפשרויות. $(9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27,216)$ לספרה הראשונה אפשר לבחור רק 9 ספרות מתוך 10 הספרות כי 0 אינו יכול להיות ספרה ראשונה. לספרה השנייה נשארו 9 ספרות לבחירה, אח"כ 8, 7, ו-6.
 ד) 859,541,760 מילים. $(22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16)$. (ה) 720 אופנים. $(10 \cdot 9 \cdot 8)$.

שאלות סיכום, עמ' 19

שאלות אלו משלבות תרגילים משלושה נושאים – תמורות, חליפות עם חשיבות לסדר עם ובלי החזרה. בשאלה 7 התלמידים מתבקשים לכתוב באיזה נושא מדובר. בשאלה 8 עליהם להרכיב שאלות. אפשר לתת את השאלה כשיעורי בית או לעבודה עצמית בקבוצות ולבדוק את התוצאות שהתקבלו. אם יש קושי בשאלה מסוימת, כדאי לשאול את התלמידים באיזה נושא מתוך הנושאים הנלמדים מדובר, על מנת להבהיר את השוני בין הנושאים השונים.

- (1) 120 אופנים. $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5!)$. [תמורות].
- (2) 720 מספרים, כאשר כל ספרה מופיעה רק פעם אחת. $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6!)$. 46,656 מספרים, כאשר כל ספרה יכולה להופיע כמה פעמים או לא להופיע בכלל. $(6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^6)$.
- (3) הספרה 0 לא יכולה להיות הספרה הראשונה במספר. 136,080 מספרים, כאשר כל ספרה מופיעה רק פעם אחת. $(9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5)$. 900,000 מספרים, כאשר כל ספרה יכולה להופיע כמה פעמים או לא להופיע בכלל. $(9 \cdot 10^5)$.
- (4) 24,360 אופנים. $(30 \cdot 29 \cdot 28)$. [חליפות עם חשיבות לסדר ללא החזרה].
- (5) 479,001,600 אופנים. $(12!)$. [תמורות].
- (6) 125 אופנים $(5 \cdot 5 \cdot 5)$. [חליפות עם חשיבות לסדר עם החזרה].
- (7) א) השאלה עוסקת בתמורות. את הספר הראשון ניתן להניח על המדף בכל אחד מ-5 המקומות. לאחר שהספר הראשון מונח על המדף, לספר השני נשארו רק 4 מקומות אפשריים, לספר השלישי רק 3 מקומות, וכו'.
 ב) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5! = 120$.
- (8) דוגמאות אפשריות:
תמורה: בכמה אופנים שונים אפשר לסדר בשורה את שמות שבטי ישראל (לדוגמה, החלונות של שגאל)
חליפות ללא חזרה ועם חשיבות לסדר: בחירת שני שמות לתינוק מתוך רשימה של 10 שמות.
חליפות עם חזרה ועם חשיבות לסדר: בחירת 3 ספרים מתוך 10, כמתנות לשלושה חברים.