שריגים

בפרק זה מוצג הקשר בין "מערכת הצירים הקרטזית", השברים ותורת המספרים (משולש פסקל). הנושא שברים מוכר לתלמידים מבית הספר-היסודי והנושא של מערכת הצירים הקרטזית נלמד בכיתה ז'. כך שיש לתלמידים את כל הידע הנדרש ללימוד פרק זה. מה שהופך את הנושא לבעל עניין מיוחד הוא השילוב בין הנושאים. התלמידים נחשפים לגישה של ייצוג והשוואת השברים באמצעות מערכת הצירים הקרטזית – גישה חדשה שלא נלמדה בעבר. בהמשך, הפרק דן בפעולה "עיגול פלוס" ובשברים שמתקבלים בפעולה זו. בסוף נלמדים מספר מסלולים המקשרים בין נקודות שונות בשריג.
הפרק בנוי ברובו לעבודה עצמית, בזוגות או בקבוצות. הפרק כולל מספר שאלות המזמינות דיון קבוצתי ואשר מפורטות בהמשך.

הערה כללית: במהלך הפעילות מומלץ להיעזר בסרגל על מנת לקבל סרטוטים מדויקים ככל האפשר.

שיעור ראשון: **שריגים ושברים**, עמ' 55 (כשיעור).

מושגים מרכזיים:

המישור הקרטזי השריגי – מערכת צירים מישורית אשר בה מתייחסים רק לנקודות בעלות שיעורים שהם מספרים שלמים חיוביים

המלצה להוראה:
את השיעור הראשון של הפרק מומלץ להתחיל מההסבר שמופיע בשיעור (עמ' 55). מומלץ לחזור ולהדגיש שהציר האנכי מייצג מונה והציר האופקי מייצג מכנה, ולכן לא ניתן להתייחס לנקודות שעל גבי הציר האנכי (מכנה אף פעם לא שווה לאפס). יכול להתעורר קושי ב"תרגום" משבר לשיעורי נקודה כי באופן אינטואיטיבי שיעור ה-x יכול להתקשר עם המונה, בעוד שבפועל הדבר הפוך. יש להדגיש את הנקודה הזו שוב ושוב, ולהסביר שבסימון (x, y) - x מייצג *מכנה* ו- y מייצג *מונה*.
לאחר שהתלמידים הבינו איך עובדים עם שריג, כדאי שיבצעו כעבודה עצמית את תרגילים 1 – 3. לאחר שיסיימו לעבוד, כדאי לבדוק את סעיף 3 ג' על מנת לראות שכולם הגיעו לכלל הרצוי. סביר להניח שיהיו תלמידים שיגיעו למסקנה ששברים גדלים כשמתקדמים מלמטה למעלה (לאורך הציר האנכי) ושברים קטנים כשמתקדמים משמאל לימין (לאורך הציר האופקי). מסקנה זו נכונה ועוזרת להשוות בין שברים בעלי אותו מונה או בעלי אותו מכנה. כדאי לבקש מהתלמידים לעשות צעד אחד קדימה ולהגיע למסקנה שככל שמתקרבים לציר האנכי, השברים גדלים. רק אחרי שמגיעים למסקנה הנכונה, ניתן להמשיך ולעבוד על שאלה 4 (עמ' 57) – עליה מומלץ לעבוד בצורה עצמאית. כדאי לבדוק את התשובה שהתקבלה.

תשובות והערות לתרגילים:

(1) א) 2/3.
ב) כל השברים שהם הרחבה של השבר 2/3. לדוגמה: 4/6 , 6/9 , 8/12.
ג) כל הנקודות נמצאות על ישר אחד. משוואת הישר $y=\frac{2}{3}x$.
ד) כל הנקודות בהן השיעורים שווים. (שיעור המונה שווה לשיעור המכנה). לדוגמה: 1/1 , 2/2, 3/3.
ה) כל הנקודות נמצאות על ישר אחד . משוואת הישר y=x.

(2) א) $y=\frac{3}{2}x$.
ב) נתון שבר a/b, כל השברים השווים לו נמצאים על הישר $y=\frac{a}{b}x$.
ג) יש ישרים שעוברים דרך הראשית ולא מייצגים שבר. לדוגמה, הישר העובר דרך π/1 אינו מייצג שבר. אך ישר זה לא עובר <u>על</u> השריג, לכן כל ישר <u>על</u> השריג העובר דרך הראשית מייצג שבר.

(3) א) נחבר כל אחת מהנקודות עם ראשית הצירים. ככל שהישר "תלול" יותר השבר אותו הוא מייצג גדול יותר. (ככל שהישר קרוב יותר לציר ה-y הוא תלול יותר)
ב) כדי להשוות שברים, יש לסמן את הנקודות המייצגות את השברים על השריג ולחבר כל נקודה עם ראשית הצירים ע"י ישר. ככל שהישר "תלול" יותר השבר המיוצג ע"י הישר גדול יותר.
ג) נבחר ½ ו- 1/3. נסמן את הנקודות על השריג. נחבר את הנקודות שסימנו עם הראשית ונבנה קוים שמתאימים לשברים ועוברים דרך השברים המורחבים. נחפש על השריג נקודה שנמצאת בין הקווים הללו והיא תהיה השבר שבין שני השברים שבחרנו.
ד) נסמן את השבר על השריג ונחבר אותו בקו ישר עם הראשית. כל הנקודות מתחת לקו מתאימות לשברים שקטנים מהשבר, וכל הנקודות שמעל הקו מתאימות לשברים שגדולים מהשבר.
ה) נבנה קוים שמתאימים לשברים 2/9 ו- 2/1. כל הנקודות שנמצאות בין שני הקווים קטנות מ- 2 וגדולות מ- 2/9.

שריגים

(4) א) 3/3 , 3/5 , 3/6 , 3/7 , 5/3 , 5/5 , 5/6 , 5/7 , 6/3 , 6/5 , 6/6 , 6/7 , 7/3 , 7/5 , 7/6 , 7/7.
ג) מעבירים קווים מתאימים לשברים, ומסדרים את השברים – הקו הקרוב ביותר לציר האופקי מייצג את השבר הקטן ביותר, הקו הקרוב ביותר לציר האנכי מייצג את השבר הגדול ביותר.
7/3>6/3>5/3>7/5>6/5>7/6>3/3=5/5=6/6=7/7>6/7>5/6>5/7>3/5>3/6>3/7

שיעור שני: **שריגים ופעולות** עמ' 58 (שיעור אחד)

מושגים מרכזיים: **פעולת "עיגול פלוס"**

המלצה להוראה:
ניתן להעביר את השיעור כסדנת עבודה עצמית (בזוגות או בקבוצות). בסעיף 1 ד' התלמידים אמורים להגיע למסקנה שהתוצאה של הפעולה "עיגול פלוס" נמצאת תמיד בין שני המחוברים. בסעיף ה' הם אמורים לרשום את המסקנה. בקבוצות מתקדמות בלבד כדאי להציע להוכיח את המסקנה. ההוכחה כוללת מספר שלבים ומסתמכת על הרמזים. מומלץ לא להתעכב על ההוכחה בקבוצות פחות חזקות, אך חשוב להדגיש שיש צורך בהוכחת המסקנה ואין להסתמך על מספר דוגמאות בלבד. בשאלה 3 התלמידים אמורים להגיע למסקנה שככל שמרחיבים את השבר, כך קטנה תוצאת הפעולה "עיגול פלוס". ייתכן מאוד שתלמידים לא ידייקו בסרטוט וכתוצאה מכך לא יגיעו למסקנה הנכונה. ניתן לבקש לסרטט דוגמאות נוספות על מנת לראות את המגמה. שאלות 4 ו- 5 הן שאלות מורכבות וייתכן שיהיה צורך לעזור לתלמידים לפתור אותן. ניתן להתחיל בבדיקת הטענות מדוגמאות מספריות ואז להגיע לפרמטרים.

תשובות והערות לתרגילים:
(1) ד) השבר, שהוא תוצאת "עיגול פלוס", נמצא בין שני השברים המחוברים.
ה) $\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} < \frac{c}{d}$.
הוכחה: נתון ש- $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. נרחיב את השברים למכנה משותף: $\frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd}$, המכנה הוא מכפלה של שני מספרים טבעיים, שהיא תמיד חיובית, לכן $ad < bc$. נוכיח שהשבר $\frac{a+c}{b+d}$ גדול מ- $\frac{a}{b}$ וקטן מ - $\frac{c}{d}$. נתבונן בהפרש בין השברים ונוכיח שההפרש תמיד חיובי, לכן מחוסר תמיד גדול ממחסר.
הפרש ראשון:
$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b\times(a+c)-(b+d)\times a}{(b+d)\times b} = \frac{ba+bc-ba-ad}{(b+d)\times b} = \frac{bc-ad}{(b+d)\times b}$$
המכנה תמיד חיובי, ידוע ש- $ad < bc$, לכן גם המונה תמיד חיובי. קיבלנו שההפרש חיובי, לכן $\frac{a+c}{b+d} > \frac{a}{b}$.
בדרך דומה נראה שההפרש $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d}$ תמיד חיובי ולכן $\frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d}$.
ו) לפי סעיף ה' תוצאת "עיגול פלוס" נמצאת בין שני השברים.

(2) א) חוק החילוף מתקיים. (במונה יש פעולת חיבור רגילה שבה מתקיים חוק החילוף, וכן לגבי המכנה).
ב) חוק הקיבוץ מתקיים. (במונה יש פעולת חיבור רגילה שבה מתקיים חוק הקיבוץ, וכן לגבי המכנה).
ג) חוק הפילוג מתקיים.
(3) א) התשובה המתקבלת שונה. ככל שהשבר מורחב יותר, התוצאה המתקבלת קטנה יותר.
ב) $\frac{2}{5} \oplus \frac{1}{2} < \frac{4}{10} \oplus \frac{1}{2} < \frac{6}{15} \oplus \frac{1}{2}$.
ככל שגורם ההרחבה גדול יותר, תוצאת החיבור קטנה יותר. בשריג רואים שברים שהולכים ומתקרבים לציר האופקי.

שריגים

(4) לא ייתכן. הסבר: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ על מנת שהביטוי יהיה שווה ל- $\frac{a+c}{b+d}$,

נפתור את הפרופורציה.... $\frac{a+c}{b+d}=\frac{ad+bc}{bd}$

$$bd(a+c) = (ad+bc)(b+d)$$
$$bda + bdc = adb + ad^2 + b^2c + bcd$$
$$-ad^2 = b^2c$$
$$-\frac{d^2}{b^2}=\frac{c}{a}$$

זה יכול להתקיים רק אם אחד מהמספרים c או a שליליים. ולפי הגדרת השריג זה לא ייתכן.

(5) השוויון מתקיים כאשר $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

$$\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d} \Leftarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b} \Leftarrow (a+c)b=a(b+d) \Leftarrow ab+bc=ab+ad \Leftarrow bc=ad \Leftarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

שיעור שלישי: שריגים ומסלולים, עמ' 61 (שיעור אחד)

מושגים מרכזיים: מסלולים על השריגים

המלצה להוראה:
מומלץ לתת את שלוש השאלות הראשונות לעבודה עצמית (בזוגות או בקבוצות) לאחר שהתלמידים הבינו מהו מסלול חוקי (הסבר בעמ' 61). בסעיף 3ד', כדאי לעצור ולבדוק לאיזו הכללה הם הגיעו. אם התלמידים מתקשים לזהות חוקיות, כדאי לבקש מהם למלא ערכים נוספים של מספרי מסלולים בשריג. אחרי שימלאו את מספרי המסלולים ליד נקודות הקרובות לראשית, כדאי לכוון אותם להסתכל על נקודות סמוכות לנקודה מסוימת ולחפש חוקיות. לאחר שהבינו את ההכללה בסעיף 3ד', ניתן להמשיך ולפתור את שאלה 4. בשאלה 4 ניתן להרחיב את הפעילות על ידי הצגת משולש פסקל. לאחר ההצגה של משולש פסקל, יש לבקש מתלמידים למצוא דמיון בין השריג U שבנו לבין משולש פסקל.

תשובות והערות לתרגילים:

(1) א) אורך המסלול 7 יחידות.
ג) אורך כל מסלול 7 יחידות.
ו) כיוון שהמסלול מורכב רק מצעדים ימינה ו/או למעלה בין נקודות השריג, האורך קבוע. סדר הצעדים לא משנה את מספר הצעדים.
ז) אורך המסלול הוא סכום שיעורי הנקודה.

(2) א) לכל הנקודות על ציר ה-x.
ב) לכל הנקודות על ציר ה-y.
ג) לכל נקודות השריג שאינן על הצירים.
ד) דרך אחת בלבד.
ה) דרך אחת בלבד (לכל נקודה שנמצאת על אחד הצירים ניתן להגיע בדרך אחת בלבד).

(3) ב) 6 מסלולים.
ג) 35 מסלולים. (15+20=35).
ד) מספר המסלולים המגיעים לכל נקודה הוא סכום המסלולים ל- 2 נקודות השריג ה"שכנות". נגדיר "נקודות שכנות" כשתי נקודות הנמצאות האחת מתחת לנקודה הנחקרת והשנייה משמאל לה.
המורה יכול להסב את תשומת לב התלמידים לדמיון שבין אופן החישוב של מספר המסלולים בשריג, לצורת חישוב ערכי הנקודות במשולש פסקל. ערכה של כל נקודה במשולש הוא הסכום של שתי שכנותיה בשורה הקודמת לה.

(4) ב) השריג סימטרי.