

העתקות איזומטריות

הנושא העתקות איזומטריות – הזזה, שיקוף וסיבוב – הוא לכאורה נושא מוכר, שהתלמידים עסקו בו בכיתות א' - ג'. מדוע בכל זאת מופיע נושא זה בתוכנית הלימודים לתלמידים מתקדמים? הסיבות העיקריות לכך הן:

- העתקות איזומטריות מהוות חלק בלתי-נפרד ממערכת האכסיומות של הגאומטריה הדוקטיבית, והן מרכיב יסודי להוכחות פורמאליות, הדורשות לעתים קרובות שימוש בהשוואת צורות (משפטי חפיפה). לכן כוונת הפרק אינה רק לרענן את הזיכרון של התלמידים, אלא להקל את המעבר מהתחום הקדם-דוקטיבי (סרטוט, הסתכלות, מדידה) לתחום הדוקטיבי (הוכחות).
- הנושא מאפשר בניית גשרים עם נושאים אחרים, כגון תורת הקבוצות וחבורות. כפי שנראה בשיעור האחרון של הפרק – צורת שבת של העתקה – התלמידים ילמדו שקבוצת ההעתקות שבהן מלבן נתון הוא צורת שבת היא חבורה חלופית לגבי פעולת הרכבת הטרנספורמציות. ליתר דיוק נושא העתקות מופיע כתת-נושא של הנושא חבורות בכיתה ז' בתוכנית הלימודים לתלמידים מתקדמים. בכל זאת מצאנו לנכון להקדיש לו פרק בפני עצמו ולמקם אותו בתחילת כיתה ח' בשל קרבתו להוראת הגאומטריה הדוקטיבית.

הפרק מחולק לחמישה שיעורים. ניתן לערוך כל שיעור במשך שעתיים.

- להלן התכונות היסודיות של העתקות איזומטריות הנלמדות בפרק:
- שיעור ראשון: ההעתקות האיזומטריות היחידות במישור הן הזזה, שיקוף, סיבוב וצירופיהן.
- שיעור שני: לשתי צורות חופפות קיימת העתקה איזומטרית או צירוף העתקות המעבירות אחת על השנייה.
- שיעור שלישי: העתקות איזומטריות שומרות על אורכים, זוויות, מאונכות ומקבילות.
- שיעור רביעי: הרכבת העתקות איזומטריות היא איזומטריה.
- שיעור חמישי: העתקות איזומטריות הן פונקציות המעבירות צורה לצורה חופפת לה. אך במקרים מסוימים (צורות שבת) העתקה איזומטרית מעבירה צורה על עצמה.

הערה: אף-על-פי שבמקרים ספציפיים נבקש מהתלמידים לכתוב הוכחות בדרך פורמאלית יחסית כמבואר לעיל, בדרך כלל אין להוכיח תכונות אלו בפני הכיתה. באופן כללי מטרת שיעורי ההעמקה היא להפעיל את התלמידים ולהוביל לפיתוח חשיבה ולא ללמד נושא בצורה פרונטאלית.

שיעור ראשון: הזזה, שיקוף וסיבוב, עמ' 1 (כשני שיעורים)

מושגים מרכזיים:

סימטריה, טרנספורמציות איזומטריות, מקור, תמונה, הזזה, שיקוף, סיבוב, סימטריה סיבובית, מרכז סימטריה/נקודת סימטריה

המלצות להוראה:

התלמידים לומדים על שלושה סוגים של העתקות איזומטריות. בעמ' 1 – כדאי לעבור עם התלמידים על הטרנספורמציות השונות ובמקביל לעשות את תרגיל 2 שבו נדרשים הילדים לבנות טרנספורמציות שלמדו. כדאי לבדוק את התרגיל על הלוח ולאפשר לתלמידים להציג מספר תשובות נכונות. את תרגילים 1, 3 – 5 ניתן לתת לילדים לפתור באופן עצמאי (לבד או בקבוצות) ולבדוק תרגילים נבחרים על הלוח. כדאי לנהל דיון קבוצתי סביב התשובות שהתקבלו.

תרגיל 6 – כדאי לבדוק את התשובה באמצעות נייר שקוף/מד זווית/חוט.

תרגיל 7 – כדאי לבקש מתלמידים לצייר את כל קווי הסימטריה.

תרגיל 8 – כדאי לבדוק את התשובה באמצעות נייר שקוף.

עמ' 5 – כדאי לחזור ביחד על הגדרה של סימטריה שיקופית.

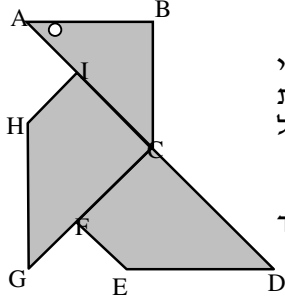
תרגיל 9 – כדאי לתת לתלמידים לפתור לבד.

במידה והתלמידים מתקשים לראות סוג זה או אחר של טרנספורמציה, מומלץ לסייע להם בעזרת המחשות – להיעזר בנייר שקוף או נייר רגיל, לגזור צורות, לסובב ולהזיז אותן עד שהתלמידים יבינו את המושגים. מומלץ לבקש מהתלמידים לצייר ולנמק את התשובות.

העתקות איזומטריות

תשובות והערות לתרגילים:

- התלמידים מגלים העתקות בציורים הנתונים, אך מומלץ להשתמש גם בצורות אחרות. (תשובות: א) שיקוף. ב) סיבוב. ג) שיקוף/סיבוב. ד) סיבוב. ה) שיקוף/סיבוב. ו) סיבוב.
- על התלמידים לפרט את דרכי הבנייה של ההעתקות האיזומטריות. דוגמה:



יש להניח שהתלמידים יבחרו קו שיקוף מאונך. עליהם לכתוב שכדי לסרטט את שיקוף התמונה, א) מודדים את המרחק בין כמה נקודות לציר השיקוף, ב) מעבירים מרחק שווה בצד השני של הציר ומסמנים כל נקודה באות המתאימה לה (לדוגמה: A' כתמונה של A), ג) מחברים בין נקודות התמונה לפי הסדר שבמקור. תשובות: ב) ציר השיקוף הוא קטע HG. ג) מרכז הסיבוב הוא קדקוד הזווית הישרה. זווית הסיבוב היא 180° .

- יישום השאלה הקודמת (שיקוף). בסעיף ג' סביר להניח שלחלק מהתלמידים יהיו קשיים בסרטוט שיקוף המשולש, מכיוון שציר השיקוף חותך את המקור.
- הזזה: כדאי להזכיר לתלמידים שמומלץ לפרק את ההזזה הנתונה להזזה אופקית ב-8 משבצות ימינה ולהזזה אנכית ב-3 משבצות למעלה. לאחר קביעת התמונה של נקודה אחת ניתן לבנות צורה זהה למקור מתמונה זו ולא להשתמש כל פעם בקטע ההזזה כדי למצוא את התמונות של כל הקדקודים של המקור.
- כדאי להדגיש את כיוון הסיבוב, לסמן את הקדקודים של הצורה החדשה ולבנות על-פיהם את הצורה.
- מרכז הסיבוב הוא הנקודה התחתונה ביותר.
- יש 6 קווי סימטריה.
- ד.
- יש להדגיש שלמעגל יש אין-סוף קווי סימטריה.

שיעור שני: זיהוי העתקה המעבירה צורה לצורה חופפת לה. עמ' 6 (כשני שיעורים)

מושגים מרכזיים: צירוף של העתקות איזומטריות

המלצות להוראה:

תרגילים 1, 2, 3 – יש לתת לתלמידים לחקור את הסעיפים השונים ולבקש מהם לנמק כל תשובה. כדאי להשתמש באמצעי המחשה מתאימים – נייר שקוף וכד'. תרגיל 4 – אפשר לבדוק את התשובה באמצעות נייר שקוף/סרגל/מד זווית.

תשובות והערות לתרגילים:

- הזזות: א, ג; שיקוף: ד, י; סיבובים: ב, ו, ח, יא; שילוב: ה, ז, ט, יב, יג (בסעיפים יב-יג גם התשובה "סיבוב" נכונה). כדאי להתעכב ולבדוק בכל אחת מהצורות איזה שילוב של העתקות מאפשר להגיע מצורה לצורה ולרשום את כל ההעתקות בצורה מדויקת.
- כדאי להשתמש בבדיקה על-ידי קיפול. א) לשתי הצורות אותו כיוון. ב) הצורות חופפות והכיוון נכון, אך הן אינן בנויות אחת "מול" השנייה. ג) הצורות אינן חופפות. ד) הצורות חופפות והכיוון נכון, אך הן אינן בנויות אחת "מול" השנייה.
- כדאי להשתמש בנייר שקוף או לגזור צורות, להזיז ולהניח. בימין, הנקודות לא מתאימות. במרכז שאר הנקודות לא "הסתובבו" לפי הזווית. בשמאל הצורות לא חופפות.
- מרכז הסיבוב הוא הנקודה התחתונה ביותר.

העתקות איזומטריות

שיעור שלישי: תכונות ההעתקות האיזומטריות, עמ' 9 (כשני שיעורים)

מושגים מרכזיים: העתקות איזומטריות שומרות על אורכים ועל זוויות.

המלצות להוראה:

שיעור זה מכניס את התלמידים לעולם ההוכחות, ולכן הם מתבקשים לכתוב מספר נימוקים. מומלץ לדון איתם בנימוקיהם ולבדוק את נכונותם. מומלץ גם לחזור על משפטי חפיפה ועל כול המושגים המופיעים בתרגילים. תרגיל 1 – כדאי לתת לתלמידים להוכיח ולנמק את ההוכחה, ולבקש מהם תיאור מדויק ככל האפשר של ההעתקות. עמ' 11 – כדאי לערוך את הסיכום במליאה, כדי לראות שכולם הגיעו למסקנות הנכונות.

תשובות והערות לתרגילים:

- (1) א. שני הקטעים (GH ו-FC) שמאונכים לאותו קטע (AC) הם מקבילים.
 ב. זווית C היא זווית שטוחה, לכן A ו-D הם על אותו ישר.
 (א) הזזה: יש לציין קטע וכיוון של הזזה.
 שיקוף: יש לציין את ציר השיקוף.
 סיבוב: יש למצוא את המרכז, הכיוון והזווית השיקוף. מספיק לציין בהערכה ולא בצורה מדויקת.
 (ב) העתקה שומרת על קטעים (AD).
 (ג) העתקה שומרת על קטעים (AC, CD).
 (ד) העתקה שומרת על כל הזוויות.
 (2) הזזה.
 (3) בשיקוף.

שיעור רביעי: הרכבת העתקות, עמ' 12 (כשני שיעורים)

מושגים מרכזיים: הרכבת העתקות – הפעלת העתקות בזו אחר זו.

נקודת שבת – נקודה המועתקת על עצמה בהעתקה איזומטרית.

המלצות להוראה:

התלמידים מתבקשים לנתח סרטוטים של הרכבות איזומטריות ולגלות את הטרינספורמציות המתקבלות. שאלה 1 – יש לתת לתלמידים להעלות השערות ולבדוק את ההשערות על-ידי אמצעי המחשה מתאימים. שאלה 2 – יש לוודא שכול התלמידים הבינו את הנתונים ומה עליהם לעשות, לבדוק את המסקנות בדיון כיתתי. לאחר-מכן לתת את התרגילים 3 - 4 לעבודה עצמית (ביחידים או בקבוצות). שאלות 5 - 7 מיועדות לעבודה עצמית (לבד או בקבוצות). עמ' 12 – יש להסביר ולהדגים בדיון מהי נקודת שבת. תרגילים 8 - 10 מיועדים לעבודה עצמית (לבד או בקבוצות). יש לבדוק ביחד את המסקנות.

תשובות והערות לתרגילים:

- (1) כן, חופפת.
- (2) הזזה.
- (3) העתקת הזזה (הערה): התלמידים טרם מכירים את מונח זה, אבל הם יכולים לענות שחוזרים על הצורה המקורית).
- (4) סיבוב.
- (5) ד. סיבוב.
- (6) ב. העתקת זהות.
- (7) הרכבת שתי הזזות היא הזזה.

העתקות איזומטריות

ההסבר באמצע העמוד מהווה הכנה לשיעור הבא על-ידי הגדרת נקודת שבת.

(8) בשיקוף כול נקודה הנמצאת על ציר השיקוף היא נקודת שבת.

(9) בהזזה אין נקודת שבת.

(10) בסיבוב מרכז הסיבוב הוא נקודת השבת היחידה.

שיעור חמישי: צורת שבת של העתקה, עמ' 15 (כשני שיעורים)

מושגים מרכזיים: צורת שבת של העתקה איזומטרית – צורה המועתקת על עצמה בהעתקה זו.

העתקת זהות (I) – העתקה שבה התמונה של כול נקודה במישור היא הנקודה עצמה (כלומר כול נקודה היא נקודת שבת).

המלצות להוראה:

חוקרים את הטרנספורמציות ה"שומרות על המלבן": שיקופים ביחס לאנכים האמצעיים של הצלעות, סיבוב של 180° סביב למרכז המלבן, והעתקת הזהות. לאחר מילוי הטבלה בעמ' 17 התלמידים יכולים לבדוק כי לכול טרנספורמציה יש טרנספורמציה נגדית, שהעתקת הזהות היא איבר ניטרלי ושפעולת הרכבת הטרנספורמציות השומרות על המלבן היא פעולה בינארית סגורה, קיבוצית וחלופית. לכן קבוצת טרנספורמציות אלה היא חבורה.

הנושא הוא מופשט גם בגלל המושגים שמופיעים בו וגם בגלל הקשר שלו לנושא החבורות. כדאי לבחון את התאמת הנושא לרמת הקבוצה. אחד הקשיים המרכזיים הוא להבין את ההבדל בין צורת שבת להעתקת זהות. חשוב להדגיש שלא כול צורת שבת מתקבלת מהעתקת זהות, אך בכול העתקת זהות כול התמונה היא צורת שבת.

עמ' 15 – יש לראות יחד עם התלמידים את ההגדרות והסימונים של נקודות במקור ובתמונה.

את תרגילים 1 - 3 יש לתת לעבודה עצמית (לבד או בקבוצות) ולבדוק תרגילים נבחרים.

תרגיל 4 – יש לוודא שכולם הבינו את הנדרש ושוב להדגיש את ההבדל בין העתקת זהות להעתקה שתמונתה היא צורת שבת. יש לבדוק את סעיף ג' במליאה ולוודא שתרגיל 4 ברור היטב, כיוון שהוא מהווה בסיס להמשך השיעור. במידה והעתקה כלשהי לא ברורה, ניתן להיעזר באמצעי המחשה מתאימים גם בשלב הזה.

עמ' 17 – יש להגדיר את הסימונים במליאה בתוך כדי מתן דוגמאות מתאימות על הלוח. יש לחזור לתרגיל 4 ולתת שמות להעתקות שמופיעות בסעיף ג'.

תרגיל 5 – יש לוודא שהסימונים ברורים לכולם ולהקפיד על רישום נכון של סדר ההעתקות בטבלה – ההעתקות שמופיעות בשורה העליונה נרשמות בצד ימין והן ההעתקות הראשונות. יש לתת לתלמידים למלא את הטבלה לבד ולבדוק את התשובות במליאה.

תרגיל 6 – זהו תרגיל שמתאים לקבוצות מתקדמות בלבד. כדאי להזכיר את המושג חבורה ולתת דוגמאות פשוטות יותר (קבוצת המספרים השלמים ופעולת החיבור). יש לבדוק היטב שכל התנאים לחבורה ברורים.

בעמ' 15 - 18 יש לתת לתלמידים להתמודד עם הסעיפים באופן עצמאי ולבדוק את התשובות במליאה.

תשובות והערות לתרגילים:

(1) סיבוב ב- 240° סביב המרכז.

(2) א) כל הישרים המתלכדים עם הישר d, כל הישרים המאונכים לישר d.

(3) סיבובים ב- 120 מעלות סביב מרכז; שיקופים דרך ישרים שעוברים במרכז וב"קדקודים".

(4) מלבן.

א) סיבוב סביב המרכז של 180 ו- 360 מעלות. שיקוף ביחס לקווים שהם אנך אמצעי לצלעות,

ב) בכל ההעתקות מרכז המלבן מועתק לעצמו.

ג)

					מקור	שם ההעתקה
O	D	C	B	A		
O	C	D	A	B	AB	שיקוף ביחס לקו שהוא אנך אמצעי לצלע
O	B	A	D	C		סיבוב של 180 מעלות סביב מרכז המלבן
O	A	B	C	D	AD	שיקוף ביחס לקו שהוא אנך אמצעי לצלע
O	D	C	B	A		סיבוב של 360 מעלות סביב מרכז המלבן

העתקות איזומטריות

(ד) שיקוף ביחס לקו שהוא אנך אמצעי לצלע AD. (5)

\circ	S_U	S_V	$R_{(M, 180^\circ)}$	$R_{(M, 360^\circ)}$
S_U	$S_U \circ S_U = I$	$S_V \circ S_U = R_{(M, 180^\circ)}$	$R_{(M, 180^\circ)} \circ S_U = S_V$	$R_{(M, 360^\circ)} \circ S_U = S_U$
S_V	$S_U \circ S_V = R_{(M, 180^\circ)}$	$S_V \circ S_V = I$	$R_{(M, 180^\circ)} \circ S_V = S_U$	$R_{(M, 360^\circ)} \circ S_V = S_V$
$R_{(M, 180^\circ)}$	$S_U \circ R_{(M, 180^\circ)} = S_V$	$S_V \circ R_{(M, 180^\circ)} = S_U$	$R_{(M, 180^\circ)} \circ R_{(M, 180^\circ)} = R_{(M, 360^\circ)}$	$R_{(M, 360^\circ)} \circ R_{(M, 180^\circ)} = R_{(M, 180^\circ)}$
$R_{(M, 360^\circ)}$	$S_U \circ R_{(M, 360^\circ)} = S_U$	$S_V \circ R_{(M, 360^\circ)} = S_V$	$R_{(M, 180^\circ)} \circ R_{(M, 360^\circ)} = R_{(M, 180^\circ)}$	$R_{(M, 360^\circ)} \circ R_{(M, 360^\circ)} = R_{(M, 360^\circ)}$

(6) א) $R_{(M, 360^\circ)}$. ב) S_U . ג) S_V . ד) $R_{(M, 180^\circ)}$. ה) $R_{(M, 360^\circ)}$ או I.

ו) מדובר בשלוש העתקות איזומטריות. הפעולה בסוגריים נעשית קודם:

$$T_3 \circ (T_2 \circ T_1) = (T_3 \circ T_2) \circ T_1$$

$$R_{(M, 180^\circ)} \circ (S_U \circ S_V) = R_{(M, 180^\circ)} \circ R_{(M, 180^\circ)} = R_{(M, 360^\circ)} \quad \text{ז) לדוגמה}$$

$$(R_{(M, 180^\circ)} \circ S_U) \circ S_V = S_V \circ S_V = R_{(M, 360^\circ)}$$

ח) כן. בהרכבת שתי ההעתקות הסדר לא חשוב. מקבלים את אותה העתקה כתוצאה.