

פיבונאצ'י

סדרת פיבונאצ'י, יחד עם כל סוגי החוקיות המלווים אותה, היא אחד התופעות המתמטיות המדהימות ביותר בעולם המתמטיקה ומחוץ לו. הכוונה בדפים האלה היא להראות לתלמידים איך המתמטיקה יכולה לתאר את הטבע, איך האומנות משתמשת ביודעין או לא ביודעין בחוקי מתמטיקה ועוד. מובן שהבאנו פה חלק קטן של התופעות הקשורות לסדרה זו, בתקווה לעורר את סקרנות התלמידים.

סדרת פיבונאצ'י מוגדרת בצורה רקורסיבית כסדרה שבה כל איבר שווה לסכום של שני איברים שקודמים לו. האיברים בסדרה נקראים "מספרי פיבונאצ'י". המנה של כל שני מספרי פיבונאצ'י רצופים שואפת ליחס הזהב - מספר בעל מופעים שונים בטבע ובעל חשיבות רבה באדריכלות ובאמנות.

נושא ראשון: סדרת פיבונאצ'י בעולם החי, עמ' 19 (כשני שיעורים)

מושגים מרכזיים:

סדרת פיבונאצ'י.

חלק זה מציג את הסדרה וחלק מהיישומים שלה בעולם החי דרך השאלה המקורית של פיבונאצ'י - בעיית הארנבות. מטרת משימה 2 היא להראות לתלמידים את סדר הגודל של המהפכה שנגרמה בעולם המתמטי המערבי הודות לשימוש במבנה העשרוני של המספר על-ידי פיבונאצ'י.

המלצות להוראה:

מומלץ להתחיל את השיעור מעבודה עצמית על תרגיל 1. כדאי לבדוק את התשובות שהתקבלו ולבקש מהתלמידים לקרוא את הקטע על ליאונרדו פיבונאצ'י. תרגיל 2 דורש תזכורת של הכתיבה הרומית. כדאי לתת את התרגיל לעבודה עצמית. עמ' 21 - מומלץ להתעכב במליאה על שני הייצוגים: באותיות ובאיור. הקושי שיכול להתעורר הוא להבין כמה זמן לוקח לזוג ארנבים להמליט זוג ארנבים חדש. כדאי להסביר היטב את המצב בארבעה החודשים ראשונים ולבדוק שהתלמידים הבינו. עמ' 23 - תרגיל 2 - מומלץ לתת כעבודה עצמית ולבדוק תוצאות בסוף.

תשובות והערות לתרגילים:

עמ' 19

- (1) א) 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144
 ב) כל המספרים במקום השלישי הם זוגיים.
 ג) כל המספרים במקום הרביעי הם כפולות של 3.
 ד) כל מספר חמישי הוא כפולה של 5. לדוגמה: 5, 55, 610.
 ה) לדוגמה: $1^2+1^2=2$, $5^2+8^2=89$.
 ו) סכום כל עשרה מספרים עוקבים מתחלק ב-11. לדוגמה: סכום עשרת המספרים הראשונים הוא 143. $143/11=13$. סכום עשרת המספרים מהאיבר השני עד האיבר ה-11 הוא 231. $231/11=21$.

(2) ערכי הספרות הרומיות:

- I = אחת
- V = חמש
- X = עשר
- L = חמישים
- C = מאה
- D = חמש מאות
- M = אלף

- א) התוצאה המתקבלת היא MMMMDCCLXX.
 ב) $2,321=MMCCCXXI$, $2,449=MMCDXLIX$. הסכום: 4,770. התוצאות שוות.
 ג) איננו יודעים בדיוק כיצד ביצעו הרומאים פעולות של חיבור וחסור או של כפל וחילוק, ייתכן שבשיטת חיבור ארוך - מספר מתחת למספר. ידוע שהם השתמשו בחשבוניות לצורך ביצוע החישובים.
 ד) המסקנה היא שהחישובים בשיטה הרומית הרבה יותר מסובכים.

פיבונאצ'י

ה) בשיטה העשרונית החישובים פשוטים ומהירים יותר, בגלל השימוש בשיטת הפוזיציה ומיעוט הסימנים.
הערה: בספר, חלק מהשורות בטבלה בעמוד 21 צבועות בצבע אפור ובתוכן כיתובים בצבע טורקיז, ובקושי ניתן להבחין במה שכתוב בשורות אלה.

עמ' 21
(1)

מספר הזוגות	זוגות ארנבות	חודש
1	צ	א
1	ב	ב
2	בצ	ג
3	בצב	ד
5	בצבבצ	ה
8	בצבבצבב	ו
13	בצבבצבבבב	ז
21	בצבבצבבבבבבב	ח
34	בצבבצבבבבבבבבבבב	ט

א) תחילת שרשרת האותיות זהה ונוספות האותיות של החודש הקודם.
ב) כעבור 12 חודשים יהיו 377 זוגות ארנבונים.
ג) בחודש השביעי יהיו 13 זוגות ארנבים. (26 ארנבים).

(2) א) בדור שלפניו רק הורה אחד-אמא. לזכר הראשון סבא אחד וסבתא אחת. 7 דורות אחורנית 13 אמהות ו-8 אבות.
ב) מספר הדבורים בכל דור הוא האיבר המתאים בסדרת פיבונאצ'י.
ג) 8 דורות אחורנית 34 דבורים. 9 דורות אחורנית 55 דבורים. מספר הדבורים בכל דור הוא האיבר המתאים בסדרת פיבונאצ'י.

נושא שני: **מגע זהב**, עמ' 24 (כעשרים דקות)

מושגים מרכזיים: **סדרת לוקס**.

יחס זהב (ϕ).

המלצות להוראה:

חלק זה, שכולו מתמטי, מהווה יישום של המושג "יחס" שהתלמידים למדו בהתחלת כיתה ח', ומהווה מבוא למושג "יחס זהב". ניתן לתת לתלמידים את הפרק כשיעורי בית קצרים ולבדוק תשובות בכיתה או לחילופין, כעבודה עצמית (לבד או בקבוצות). לשאלה 2 די נדרשת גישה לאתר "ויקיפדיה".

תשובות והערות לתרגילים:

(1) א) החל מהאיבר השלישי כל איבר הוא סכום שני האיברים הקודמים לו. שני האיברים הראשונים הם 1 ו-3. שתי הסדרות, לוקס ופיבונאצ'י, **בנויות על אותו עיקרון**, השוני הוא בשני האיברים הראשונים. ב) האיבר ה-8 הוא 47. האיבר העשירי הוא 123.

(2) א)

זוג מספרי פיבונאצ'י עוקבים	מנת שני המספרים
3, 5	$5 : 3 = 1.666$
5, 8	$8 : 5 = 1.6$
5, 13	$13 : 8 = 1.625$
13, 21	$21 : 13 = 1.615$
55, 89	$89 : 55 = 1.618$
89, 144	$144 : 89 = 1.6179$
144, 233	$233 : 144 = 1.618$
233, 377	$377 : 233 = 1.618$

פיבונאצ'י

(ב) היחס מתקרב ל-1.618. (היחס הוא $+1$ האיבר הקודם מחולק באיבר הקודם לו).
 (ג) החוקיות מתקיימת בין כל זוג מספרים עוקבים **החל מן האיבר הרביעי** בסדרת פיבונאצ'י ובסדרת לוקס.
 (ד) מספר אי-רציונלי הוא מספר שאי-אפשר לכתבו כמנה של שני מספרים טבעיים. כלומר יחס הזהב אינו יחס בין שני מספרים טבעיים. את יחס הזהב גילה אחד מתלמידיו של פיתגורס, לפני כ-2300 שנה. ליחס הזהב קוראים גם יחס קיצוני וממוצע. שם נוסף הוא **פרופורציה אלוהית**.
 האות היוונית ϕ היא האות הראשונה בשמו של הפסל היווני פידיאס שחי בשנים 430-490 לפנה"ס. הוא האחראי, בין היתר, על הפיסול בפרתנון שבאקרופוליס באתונה. בפרתנון יש שימוש נרחב ביחס הזהב.

נושא שלישי: יחס הזהב, גאומטריה ואמנות, עמ' 26 (כשני שיעורים)

מושגים מרכזיים:

יחס הזהב.

חיתוך הזהב.

המלצות להוראה:

הערה: יש להכין דפים וכלי סרטוט: סרגל, עפרון, מחוגה.
 מומלץ להקדים עם ההסבר אודות יחס הזהב שמופיע בעמ' 26 במסגרת.
עמוד 26 תרגיל 1 – עבודה עצמית (לבד או בקבוצות). על מנת לוודא שתלמידים הפנימו קשר בין סדרת פיבונאצ'י לבין חלוקת קטע על-פי יחס הזהב, מומלץ לבקש מהם להסביר את הקשר במילים שלהם – להראות איך מיוצג בסדרה הקטע הגדול, הקטע הקטן והסכום של שני קטעים.
עמ' 27 – הופעת יחס הזהב בארכיטקטורה ובאומנות. מומלץ לתת לתלמידים לקרוא את הקטע בעמ' 27 בעבודה עצמית וכן לגשת לאינטרנט ולמצוא מקומות נוספים, בהם מופיע יחס הזהב.
הפרתנון הוא מקדש יווני הניצב על האקרופוליס של אתונה העתיקה והוא נחשב לבניין המפורסם ביותר מתקופת יוון העתיקה, ולאחד הבניינים המפורסמים ביותר בעולם.
 הפרתנון נבנה באמצע המאה ה-5 לפנה"ס כהודיה לאתנה, האלה הפטרונית של העיר, על ניצחון אתונה והיוונים במלחמה היוונית-פרסית. הבניין נקרא רשמית "המקדש של אתנה הבתולה", והשם הפופולרי שלו מגיע מהמילה היוונית לבתולה – "פרתנוס".
 את תרגילים 2 – 6 ניתן לעשות בעבודה עצמית (לבד או בקבוצות) ולבדוק תוצאות של תרגילים נבחרים.

תשובות והערות לתרגילים:

- (1) (ב) אורכי הקטעים 8 ו-13 ס"מ. (ג) אורכי הקטעים הם 13 ו-21 ס"מ.
- (2) היחס הוא 1.6. $(1.6 = 95 : 152)$. קרוב ליחס הזהב.
- (3) היחס הוא 1.6. $(1.6 = 5.3 : 8.5)$. קרוב ליחס הזהב.
- (4) מידות המלבן צריכות להיות איברים עוקבים בסדרת פיבונאצ'י.
- (5) הצורה הנשארת היא מלבן שמידותיו הן 13 ו-8 ס"מ. יחס הזהב מתקיים. כאשר חוזרים על התהליך מתקבל מלבן שמידותיו הן 8 ו-5 ס"מ. חזרה נוספת תיתן מלבן שמידותיו הן 5 ו-3 ס"מ.

פיבונאצ'י

נושא רביעי: ספירלות, פנטגרמים וצורות אחרות, עמ' 29 (כשני שיעורים)

מושגים מרכזיים:

ספירלת זהב.

פנטגרם.

דפים האלה מתוארות תופעות נוספות הקשורות ליחס הזהב.

המלצות להוראה:

הערה: יש להכין כלי סרטוט ומדידה: דף נייר, סרגל, מספריים, מחוגה.
 עמ' 29 – 30: מומלץ לתת לתלמידים כעבודה עצמית בקבוצות. חשוב שתהיה לתלמידים גישה לאתר ויקיפדיה על מנת שיוכלו להשיב על שאלה מס' 2. במידה ואין אפשרות להשתמש במחשב, כדאי לתת את השאלה כעבודת בית. בסיום הפעילות כדאי לבדוק תשובות שהתקבלו. בשאלה מס' 1 יש לוודא שכל התלמידים הבינו כיצד להעביר קשתות.
 עמ' 31 - יש לוודא שהמשימה ברורה ושבידי תלמידים הכלים המתאימים. תרגילים 3-4 מתאימים לעבודה עצמית בקבוצות.
 בסיום העבודה יש להדגיש את הקשר בין הממצאים לבין סדרת פיבונאצ'י ויחס הזהב. רצוי לבקש מהתלמידים לסכם את הפרק ולומר ממה הכי נהנו.

תשובות והערות לתרגילים:

- (1) (ב) צלעות הריבועים הן איברים עוקבים בסדרת פיבונאצ'י. (ג) מידות הריבוע הנוסף 13 ס"מ.
- (2) (א) הפנטגרם מכונה "מגן שלמה" או "חותם שלמה".
 (ב) הפנטגרם שימש סמלה של ירושלים. היום הוא מופיע על דגלן של אתיופיה ומרוקו.
 (ג) היחס הוא יחס הזהב.
- (3) (א) אורך צלע הריבוע 8 יחידות אורך. שטחו 64 יחידות שטח.
 (ד) אורך המלבן 13 יחידות אורך. רוחבו 5 יחידות אורך. שטחו 65 יחידות שטח.
 (ה) במעבר בין הריבוע למלבן נוסף ריבוע ששטחו 1 יחידת שטח.
 (ו) אורכי צלעות הריבוע והמלבן הם איברים בסדרת פיבונאצ'י.
- (4) (א) בכיוון השעון 5 ספירלות. בכיוון הנגדי 8 ספירלות. איברים עוקבים בסדרת פיבונאצ'י.
 (ב) בכיוון השעון 21 ספירלות. הכיוון הנגדי 34 ספירלות. איברים עוקבים בסדרת פיבונאצ'י.

** רקע תיאורטי – אתר "וויקיפדיה"